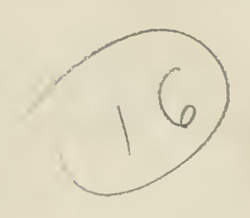

3 1761 07550028 0



COURS

DE MÉCANIQUE.

LIBRAIRIE DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR :

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, seconde édition. 2 vol. in-8°; 1847 .... 10 fr.

COURS DE MÉCANIQUE, seconde édit. 2 vol. in-8° avec planches. 12 fr.

On délivrera un BON pour le second volume, qui sera publié en décembre 1853.

PROBLÈMES ET DÉVELOPPEMENTS SUR DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES; par MM. DUHAMEL et REYNAUD. In-8°.... 7 fr. 50 c.

PARIS.— IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
12, rue du Jardinet.

COURS
DE MÉCANIQUE,

PAR M. DUHAMEL,
Membre de l'Institut (Académie des Sciences).

PREMIÈRE PARTIE.
Seconde édition.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, GENDRE ET SUCCESSEUR DE BACHELIER,
Imprimeur-Libraire
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

1853

PRÉFACE.

Cette nouvelle édition ne diffère pas essentiellement de la première. Toutefois, la distinction des matières y est rendue plus sensible par la division en livres, et en chapitres assez nombreux. Des développements nouveaux ont été introduits sur plusieurs points importants, particulièrement sur le mouvement relatif produit par des forces données; et sur le mouvement considéré en lui-même, et indépendamment des causes qui le produisent. .

Quant à la marche générale, et aux divisions principales, elles sont restées entièrement les mêmes. Nous traitons d'abord de l'équilibre, puis du mouvement des systèmes de points, soit rigides, soit variables de figure; ce qui constitue la Statique et la Dynamique proprement dites.

Il nous a paru qu'il était convenable de présenter sans interruption tout ce qui se rapporte à la Statique, afin que l'on saisît mieux la liaison des différentes parties. Mais, dans la pratique de l'enseignement, on peut, sans inconvénient, interrompre la Statique avant la démonstration de ses principes les

plus généraux, et commencer l'étude de la Dynamique; puis revenir à la Statique et achever ensuite la Dynamique : les théories de l'équilibre précédant toujours les correspondantes dans l'étude du mouvement. Le professeur rétablira facilement l'enchaînement que ces interruptions pourraient rendre moins sensible.

Cette subordination de la Dynamique à la Statique, adoptée le plus ordinairement dans l'enseignement de la Mécanique rationnelle, n'a point été choisie arbitrairement; elle tient au fond même des choses, et l'étude de l'équilibre doit naturellement précéder celle du mouvement. Qu'on nous permette quelques réflexions à ce sujet.

Remarquons d'abord que c'est dans cet ordre que la science a été formée. Dix-huit siècles séparent l'origine de la Statique de celle de la Dynamique, c'est-à-dire Archimède de Galilée. Mais cette considération, quelque importante qu'elle soit, ne suffirait pas dans une question aussi grave, et qui a, même en ce moment, une certaine opportunité. Elle demande à être examinée en elle-même; et c'est ce que nous allons faire en peu de mots.

Et d'abord, l'équilibre est-il simplement une conception de notre esprit, propre à faciliter l'accès à la science du mouvement, ou bien est-il utile à étudier en lui-même? A-t-il des applications importantes et

nombreuses dans la vie ordinaire? Quelques exemples suffiront pour rendre la réponse bien facile.

Dans les relations des hommes entre eux, la mesure des poids est aussi nécessaire et aussi usuelle que celle des quantités géométriques. Or cette mesure s'opère au moyen de divers instruments dont l'emploi est fondé sur les conditions d'équilibre des forces parallèles. C'est même là la première question de Statique dont Archimède ait donné la solution.

La considération de l'équilibre se trouve encore dans les voûtes et les charpentes, qui forment une partie si essentielle des édifices de tout genre. Elle se trouve dans la construction des vaisseaux, des ponts de toute espèce et d'une foule d'appareils qu'il serait impossible d'énumérer. On comprend facilement de quelle importance il est de calculer les efforts exercés en chaque point et d'y proportionner les résistances qui assurent la solidité de l'ensemble. Or, dans toutes ces questions, il n'y a que des conditions d'équilibre; les lois du mouvement n'y jouent aucun rôle.

L'équilibre des fluides présente encore des applications de la plus grande utilité. Nous nous bornons à indiquer l'aréométrie, la théorie du flottement des corps à la surface des eaux, et la mesure des hauteurs par le baromètre.

Enfin, les conditions de l'équilibre, dans les ma-

chines de tout genre, nous offrent des applications dont on ne peut méconnaître l'importance. Les machines sont destinées sans doute à être mises en mouvement; mais c'est déjà beaucoup que de connaître les relations entre les forces qui s'y font équilibre. On peut alors proportionner les différentes parties de la machine que l'on considère, de manière à ce que les forces dont on dispose puissent exactement balancer l'effort que l'on veut vaincre. On sait ainsi quelle grandeur il faudrait donner à une force pour déterminer le mouvement de la machine dans le sens où elle agit; car il suffirait qu'elle fût supérieure à celle qui établit l'équilibre.

Il est bien entendu qu'on tiendra compte de la force que produit le frottement, et qui entre quelquefois pour beaucoup dans le maintien de l'équilibre. Dans l'exposition de la théorie, on suppose d'abord qu'on en fasse abstraction, et l'on cherche les conditions d'équilibre de l'appareil que l'on considère, en ne tenant compte que des liaisons géométriques qui le définissent, et en lui supposant appliquées des forces quelconques. Lorsqu'ensuite on veut traiter les machines telles qu'elles sont dans la pratique, il suffit de joindre aux forces données celles qui proviennent du frottement, et même d'autres résistances dont nous ne parlons pas ici.

Les conditions d'équilibre conduisent encore à une

notion de la plus grande importance dans la théorie des machines; celle de l'égalité entre la quantité de travail dépensée et la quantité de travail produite lorsque le mouvement est uniforme, c'est-à-dire lorsque les forces appliquées à la machine y sont en équilibre. Le travail produit se composant du travail utile et de celui des résistances que l'on ne peut entièrement éviter, il en résulte qu'une machine fournit toujours moins de travail utile qu'elle n'en consomme. Il manque sans doute quelque chose à la démonstration générale de ce théorème, parce que le mouvement ne peut pas toujours être rendu uniforme, quoiqu'on y tende le plus possible; mais les cas simples où l'on peut l'établir, suffisent pour prévenir les illusions fâcheuses que l'on pourrait se faire sur l'utilité des machines, et pour bien faire comprendre qu'elles ont pour objet de transformer, mais non d'augmenter, la quantité de travail qu'on y introduit.

Sans entrer dans de plus grands développements, nous croyons qu'on admettra comme incontestable l'utilité de l'étude de l'équilibre, indépendamment de toute application à celle du mouvement. Ajoutons que celle-ci est beaucoup plus difficile que la première, et qu'elle s'y ramène immédiatement au moyen du principe de d'Alembert. Mais une considération plus puissante encore est celle des principes sur lesquels ces deux sciences sont fondées. Elles dépendent

l'une et l'autre, à des degrés différents, des lois assignées au monde matériel. Leurs bases doivent donc être des résultats de l'observation, ou des hypothèses. Or la science du mouvement en exige un plus grand nombre que celle de l'équilibre; et, si certaines lois de la nature étaient modifiées, la Dynamique serait entièrement changée, tandis que la Statique resterait encore ce qu'elle est. Ce serait donc renverser l'ordre naturel des choses que de présenter la théorie des mouvements produits par les forces, avant celle de leur équilibre. Toute tentative de ce genre serait, à nos yeux, un pas rétrograde; et le succès qu'elle pourrait avoir ne saurait être durable.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

LIVRE SECOND.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

LIVRE TROISIÈME.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

COURS DE MÉCANIQUE.

LIVRE PREMIER.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS GÉNÉRALES.

1. On dit qu'un point est en repos lorsqu'il occupe constamment la même position dans l'espace; et qu'il est en mouvement lorsque cette position change d'une manière continue. Nous ne pouvons par aucun moyen reconnaitre si un point est en repos ou en mouvement, parce que nous ne connaissons pas d'objets fixes auxquels nous puissions rapporter sa position : seulement nous pouvons affirmer que si la position relative de plusieurs points n'est pas restée la même, il y en a un certain nombre dont la position absolue a changé.

Lorsqu'un grand nombre d'objets conservent la même position relative, on est porté à les juger en repos; et si l'un d'eux change de place par rapport au système, c'est à lui qu'on attribue le mouvement. C'est ainsi que l'on a cru pendant si longtemps la terre immobile dans l'espace. Une étude approfondie des phénomènes peut modifier cette première impression; mais on ne peut jamais avoir de certi-

tude à cet égard, et les principes sur le mouvement absolu, auxquels on est conduit par l'observation des mouvements relatifs, ne sont que des inductions qui peuvent avoir une grande probabilité, mais qui ont toujours besoin d'être vérifiées par l'accord entre les conséquences logiques auxquelles elles conduisent et les phénomènes observés directement.

2. *Forces.*—Le principe le plus simple auquel on parvient de cette manière consiste en ce qu'un point qui est en repos absolu y resterait indéfiniment s'il ne survenait certaines causes en dehors de lui qui le missent en mouvement. Ces causes se nomment des *forces*, et la direction d'une force est celle de la ligne suivant laquelle le point se mouvrait en vertu de son action, s'il était entièrement libre.

La notion des forces est une des plus simples et des plus incontestables; elle nous vient de l'expérience de tous les instants. Nous ne pouvons déranger un corps de la position qu'il occupe sans avoir le sentiment d'un effort; nous l'éprouvons de même pour soutenir un corps pesant, et nous avons bientôt l'idée d'un effort plus grand ou plus petit, avant d'avoir des moyens précis de comparaison. Il faut donc bien se garder de dire que la notion des forces ait rien d'hypothétique. Elle est aussi certaine que tout ce qui nous vient de l'expérience. Quant à leur nature intime, elle ne sera pas plus l'objet de nos études que ne le sera l'essence de la matière elle-même. En cela, comme en tout ce qui dépend de notre système du monde, nous partirons de données expérimentales bien constatées, et nous n'emploierons le raisonnement qu'à en développer les conséquences.

On dit que des forces sont égales lorsque, appliquées en sens contraires à un même point libre et en repos, elles ne lui font prendre aucun mouvement. La notion de l'égalité conduit à celle du rapport quelconque, en entendant par *somme* de plusieurs forces la force qui peut remplacer l'en-

semble des premières sollicitant le même point dans la même direction. Les forces, pouvant ainsi être évaluées en nombres, peuvent aussi être représentées par des longueurs; et il sera commode de prendre ces longueurs sur la direction suivant laquelle elles agissent, et à partir du point auquel elles sont appliquées.

3. *Masse.*— L'expérience montre que la même force ne produit pas toujours un mouvement identique quand elle est appliquée à des corps différents. Ce fait donne lieu à une notion nouvelle qui est celle de *masse*.

On dit que deux corps d'espèce quelconque ont même *masse* lorsque des forces égales produisent des mouvements identiques sur ces corps libres et partant du repos. Si on lie ensemble deux corps, on en forme un nouveau dont la masse est dite la *somme des masses* des deux autres. L'idée de masses égales conduit à celle de masses dans un rapport quelconque; et les masses de tous les corps peuvent être représentées par des nombres, si on les rapporte à celle d'un volume connu d'une matière déterminée.

On voit par là que des corps formés d'une même substance homogène ont des masses proportionnelles à leurs volumes, et, par conséquent, aux quantités de matière qu'ils renferment. Mais, comme on ne pourrait attacher aucun sens précis à la comparaison des quantités de matière de deux substances différentes, ni surtout en tirer aucunes conséquences relativement aux effets des forces, on n'a dû admettre d'autres caractères distinctifs entre les différents corps et les différentes substances, que ceux qui dépendent de la manière dont ils se comportent sous l'action des forces qui les mettent en mouvement.

La notion de la masse offre donc cette différence essentielle avec celle de la force, qu'elle ne saurait s'acquérir comme elle par l'équilibre, et qu'elle ne peut se déduire que de la considération du mouvement.

4. *Densité.* — La *densité* d'un corps homogène est la masse renfermée sous l'unité de volume; elle est, par conséquent, le rapport de la masse renfermée sous un volume quelconque à ce volume.

Lorsqu'un corps n'est pas homogène, la densité en un quelconque de ses points est la densité moyenne d'une portion infiniment petite du corps dans laquelle se trouve ce point; ou, en d'autres termes, la limite du rapport de la masse renfermée dans cette portion à son volume, quand il tend vers la limite zéro.

Lorsque des forces sont appliquées à un système de points, ayant entre eux des liaisons quelconques, il est possible qu'elles produisent un mouvement, comme il est possible aussi qu'elles s'entre-détruisent, et que le système reste en repos; dans ce dernier cas, on dit que ces forces sont en *équilibre*.

L'ensemble des lois de l'équilibre forme ce que l'on appelle la *statique;* les lois du mouvement forment ce que l'on appelle la *dynamique*; et la réunion de ces deux branches constitue la science à laquelle on a donné le nom de *mécanique*.

Remarques générales.

5. Lorsqu'un système de points est en équilibre, on ne détruit pas cet état en fixant un ou plusieurs de ces points, ou en établissant entre eux des liaisons nouvelles.

On peut encore, sans rompre l'équilibre, introduire de nouvelles forces telles, qu'elles se détruiraient si elles agissaient seules sur le système de points donné; ou supprimer des forces qui se détruisent effectivement par les efforts qu'elles exercent sur ce système.

Mais il faut bien remarquer qu'il ne suffirait pas que ces dernières fussent en équilibre dans le cas où elles agiraient

seules sur le système. Si elles ne produisent pas réellement les efforts qu'elles produiraient si elles étaient seules, elles ne se détruisent pas entre elles, et, dès lors, on ne saurait affirmer que l'équilibre ne sera pas rompu si on les supprime.

Enfin on peut, sans détruire l'équilibre, supprimer un groupe de forces telles, que des forces respectivement égales et appliquées aux mêmes points en sens contraire seraient en équilibre si elles existaient seules sur le système. En effet, on ne dérange pas l'équilibre primitif en introduisant ces dernières forces; mais chacune d'elles détruisant la force égale et contraire appliquée au même point, on peut les supprimer l'une et l'autre en chaque point sans déranger l'équilibre, et il ne reste plus que les forces primitives, moins le groupe en question.

Ces principes, bien simples, sont d'une grande utilité, à cause des transformations sans nombre qu'ils permettent de faire.

Changement du point d'application d'une force.

6. Lorsqu'une force P est appliquée à un point libre A, on peut, sans changer son effet, quel qu'il soit, l'appliquer à tout autre point B de sa direction, pourvu que ce point soit lié invariablement au premier. Si le point B est situé par rapport à A du côté où s'exerce l'action de la force P, il suffit que la distance AB ne puisse augmenter; ce qui sera le cas, par exemple, où ces deux points seraient liés par un corps extrêmement délié, éminemment flexible et inextensible. Nous donnerons dorénavant le nom de *fil* à un pareil corps, et nous le considérerons comme n'ayant de dimension que dans le sens de la longueur. Si le point B était de l'autre côté de A, il suffirait que la distance AB ne pût di-

minuer, comme cela arriverait si le point B était posé contre un obstacle inflexible lié invariablement au point A.

Pour le démontrer, dans le premier de ces deux cas, appliquons aux extrémités de la droite inextensible AB (*fig.* 1) deux forces égales à P, et agissant suivant la droite AB dans les directions AP′, BP″; elles se détruiront évidemment, à cause de la symétrie dans les deux sens, et le système ne sera pas changé. Mais les deux forces égales P, P′, appliquées au même point en sens contraires, se détruisent, et il ne reste plus que la force P″, qui n'est autre que la force P transportée au point B de sa direction. On raisonnerait d'une manière analogue si le point B était situé de l'autre côté du point A.

7. Mais il est important de remarquer que la force ne saurait être transportée parallèlement à elle-même en un point qui ne serait pas sur sa première direction, et plus généralement qu'une force ne peut être remplacée, sur un système libre, par une autre qui n'agirait pas suivant la même ligne droite.

Pour cela, on observera d'abord que deux forces qui ne sont pas directement opposées ne peuvent jamais se détruire, sur un système de points entièrement libre. En effet, si elles étaient en équilibre, elles y seraient encore lorsque l'on fixerait le point d'application de l'une d'elles, ce qui détruirait son action. Il ne resterait donc plus qu'une seule force dont la direction ne passerait pas par le point fixe autour duquel le système peut tourner : or nous admettons, comme une des données premières de l'expérience, que, dans ce cas, la force le mettra en mouvement. D'où il résulte que les deux forces en question n'étaient pas en équilibre.

Cela posé, soient A (*fig.* 2) le point auquel est appliquée une force P, et B un point lié invariablement au premier. L'effet de la force P ne sera pas changé, si nous ap-

pliquons en B deux forces P′, P″ égales, parallèles à une certaine direction quelconque et de sens contraire. Or, pour que le système se réduisît à la force P″, il faudrait que P et P′ se détruisissent, ce que nous venons de démontrer impossible. Donc la force P ne peut être remplacée par aucune force appliquée en un point situé hors de sa direction primitive. Et, par conséquent, toutes les fois qu'on pourra prouver qu'une force, agissant sur un système libre, peut, sans changer d'effet, être remplacée par une autre, appliquée en un certain point, on en conclura nécessairement que sa direction passait par ce point. Il est facile de reconnaître, en outre, que cette nouvelle force doit être égale à la première; car il a été démontré que, dans la position où elle se trouve, elle pourrait remplacer la première si elle lui était égale; donc, si elle était plus grande ou plus petite, elle ne produirait pas le même effet que la première, ce qui est contre l'hypothèse.

8. Avant d'aller plus loin, nous allons montrer, par un exemple très-simple, combien il est nécessaire d'avoir égard à l'observation que nous avons faite au sujet d'un des principes précédents.

Soient A et B (*fig.* 3) deux points liés de telle sorte, qu'ils ne puissent s'éloigner l'un de l'autre, mais qu'ils puissent se rapprocher. Que l'on applique au point A deux forces égales et contraires P, P′ dans la direction de la droite AB, et que l'on applique à B deux forces Q, Q′ égales aux premières, et agissant en sens contraire suivant la ligne AB. Il y aura équilibre dans le système, puisqu'il y a équilibre en chaque point. Or les deux forces P, Q′ seraient en équilibre si elles agissaient seules sur le système AB, et cependant on ne peut les supprimer sans rompre l'équilibre des quatre forces; car il resterait les deux forces P′ et Q, qui ne se détruiraient pas, puisque les deux points A et B peuvent se rapprocher par hypothèse. Or il est facile de re-

connaître que le groupe P, Q′ ne rentre dans aucun des deux cas que nous avons indiqués précédemment.

En premier lieu, les deux forces P et Q′ ne se détruisent pas effectivement, et ne produisent pas sur AB l'effort qu'elles produiraient si elles y étaient seules appliquées. La force P est détruite par P′, et n'agit que sur le point A; il en est de même des forces Q et Q′ en B, et il n'en résulte aucune action entre les points A et B, qui ne cesseraient pas d'être en équilibre quand même il n'existerait aucune liaison entre eux.

En second lieu, les forces P′ et Q, égales et opposées à P et Q′, ne seraient pas en équilibre si elles agissaient seules sur le système, puisque les points A et B peuvent se rapprocher.

Donc enfin, on ne pouvait affirmer qu'en supprimant les forces P et Q′ on ne détruisait pas l'équilibre; et nous avons vu qu'effectivement il se trouverait détruit par cette suppression.

Composantes et résultante.

9. Considérons un système de points liés entre eux invariablement et entièrement libre dans l'espace; si des forces appliquées à ce système sont telles, qu'il y aurait équilibre en introduisant une nouvelle force P, l'ensemble des premières pouvait être remplacé par une seule force égale et directement opposée à P. En effet, on ne changera pas l'effet des premières forces en introduisant la force P conjointement avec une autre égale et opposée. Or, par hypothèse, P détruit l'ensemble des premières; donc il ne reste que la force égale et opposée à P. Cette force unique, qui peut en remplacer plusieurs autres, s'appelle leur *résultante*, et les premières s'appellent ses *composantes :* on voit que la recherche de la résultante rentre dans le problème de l'équilibre.

10. *Remarques diverses.* — Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un même point, et qu'elles ne sont pas en équilibre, elles ont toujours une résultante; car le point tend, par leur action, à se mouvoir dans une certaine direction déterminée, et, si l'on appliquait en sens contraire une force d'une intensité convenable, on empêcherait évidemment le mouvement de se produire, et l'équilibre aurait lieu. Donc, d'après ce que nous venons de dire, les forces proposées avaient une résultante.

11. Lorsqu'un point est sollicité par trois forces en équilibre, et qui agissent sur lui, par exemple par l'intermédiaire de fils flexibles, on ne voit aucune raison pour que l'une quelconque d'entre elles soit d'un côté du plan des deux autres plutôt que du côté opposé; et l'expérience montre, en effet, que les directions de ces trois forces, qui sont celles des fils eux-mêmes, sont toujours dans un même plan. On peut reconnaître de plus qu'elle est dirigée dans l'intérieur de l'angle formé par les directions des deux forces, ce qui revient à dire que le point sollicité par ces forces se mouvrait dans l'intérieur de cet angle. En effet, si le point n'était sollicité que par l'une des forces, il se mouvrait dans sa direction même; mais l'autre force tendant à l'écarter de cette ligne, on doit admettre qu'il se mouvra du côté où est située cette seconde force. En raisonnant de la même manière, en sens inverse, on voit que le point ne peut se mouvoir que dans la partie du plan qui se trouve comprise entre les directions des deux forces. Donc la force unique qui remplacerait ces dernières a sa direction dans l'angle qu'elles forment entre elles. On peut ajouter que l'expérience confirme cette induction en montrant que quand trois forces appliquées à un point libre se détruisent, l'une quelconque d'entre elles a son prolongement dans l'angle des deux autres.

On tire de là cette conséquence, que la résultante de deux

forces, appliquées à un même point, est toujours comprise dans le plan et dans l'angle de ces forces.

Dans le cas où les deux forces sont égales, la direction de leur résultante ne peut être que celle de la droite qui divise leur angle en deux parties égales; et c'est aussi ce que donne l'expérience.

12. Lorsque deux forces égales sont appliquées à un même point, elles peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque de la bissectrice de leur angle, pourvu qu'il soit lié invariablement au premier. Car ces forces peuvent être remplacées par une seule, dirigée suivant cette bissectrice, et qui peut être appliquée en un quelconque de ses points : or, en ce point, elle peut être décomposée comme au premier point d'application, et l'on aura ainsi deux forces égales et parallèles aux premières, appliquées en un point quelconque de la bissectrice.

CHAPITRE II.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES A UN MÊME POINT.

13. *Résultante de deux forces.* — Nous considérerons d'abord deux forces commensurables. Soient P, Q (*fig.* 4) ces forces, A leur point d'application; AM, AN des longueurs proportionnelles à ces forces; m, n deux nombres entiers, tels que l'on ait P : Q :: m : n :: AM : AN; partageons les longueurs AM, AN en parties égales AB, BC, AH, etc., dont les nombres soient respectivement m, n; ces diverses parties représenteront des forces, dans lesquelles on pourra décomposer les premières. Menons par les points B, C, etc., des parallèles à AN, et par les points H, K, etc., des parallèles à AM; ces droites partageront le parallélogramme AMIN en losanges égaux. Cela posé, les deux

forces égales AB, AH peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes au point D de la bissectrice de leur angle; elles seront alors dirigées suivant les deux cotés BD, HD qui les représenteront aussi en longueur. En agissant de la même manière sur les deux forces BD, BC, on les transportera sur DE, CE; et, en continuant ainsi, la force AH sera transportée en MF, et AM en HF. De même, les forces HK, HF pourront être transportées en FG, KG, et ainsi de suite; de sorte que les deux forces AM, AN seront transportées en NI, MI, sans que leur effet soit changé. Or elles donneraient en I une résultante égale et parallèle à celle qu'elles donnaient en A; donc, d'après ce que nous avons démontré précédemment, le point I appartient à la direction de cette dernière.

Il suit de là que *la résultante de deux forces commensurables est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent ces forces en grandeur et en direction.*

14. On peut passer de là au cas des forces incommensurables par la considération des limites. On peut encore employer la réduction à l'absurde, comme il suit.

Si la diagonale AI (*fig.* 5) n'est pas la direction de la résultante des forces incommensurables AM, AN, soit AH cette direction. Par le point H, où elle rencontre l'un des deux côtés du parallélogramme, menons la parallèle HK à l'autre côté; nous pourrons prendre entre M et K un point B, tel que AB soit commensurable avec AN, et alors la diagonale AC du parallélogramme NABC donnera la direction de la résultante des forces AN, AB. Il faudrait donc qu'en la composant avec la force représentée par BM, et qu'on peut supposer appliquée au point A, on trouvât la résultante des deux forces données, qui est dirigée suivant AH par hypothèse; ce qui est absurde, puisque cette direc-

tion n'est pas comprise dans l'angle CAM des deux forces composantes.

Donc, quel que soit le rapport des forces, leur résultante est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui les représentent.

15. Il reste encore à déterminer l'intensité de la résultante des deux forces P, Q. Pour cela nous observerons que si nous appliquons suivant la direction AX (*fig.* 6), opposée à celle de la diagonale AI, une force R égale à la résultante, il y aura équilibre entre les trois forces P, Q, R. La force Q, par exemple, sera donc égale et opposée à la résultante des deux autres P, R; et, par conséquent, si par le point P nous menons une parallèle à AX, qui coupe en B le prolongement de AQ, et que, par le point B, nous menions BC parallèle à AP, la longueur AC représentera la force R; car toute autre grandeur, conjointement avec AP, donnerait un parallélogramme dont la diagonale serait différente de AB. Mais AC = BP = AI; donc la résultante des deux forces P et Q est égale à AI; et, par conséquent, *la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces représente, en grandeur et en direction, la résultante de ces forces.*

Les deux forces P, Q, et leur résultante R, sont donc les trois côtés d'un triangle dont les angles sont respectivement ceux que la direction de la résultante forme avec celle des deux autres, et le supplément de l'angle que forment entre elles ces deux dernières. Chaque force peut donc être représentée par le sinus de l'angle des deux autres; ce qui s'exprimera ainsi :

$$P : Q : R :: \sin QR : \sin PR : \sin PQ;$$

on a, de plus,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ \cos PQ.$$

Si l'angle PQ est droit, ces relations deviennent

$$P = R\cos PR, \quad Q = R\cos QR, \quad R^2 = P^2 + Q^2.$$

Toutes les questions que l'on peut se proposer sur la composition de deux forces appliquées à un même point, ou sur la décomposition d'une force en deux autres, sont donc ramenées à la construction ou à la résolution d'un triangle; et il serait superflu d'entrer dans plus de détails à cet égard.

Composition et équilibre de forces en nombre quelconque appliquées à un point libre.

16. La résultante de deux forces appliquées à un même point étant représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent ces forces en grandeur et en direction, il s'ensuit que pour avoir la résultante d'un nombre quelconque des forces P, P′, P″, etc., appliquées à un point A, et représentées par les droites AP, AP′, AP″, etc., on pourra composer d'abord les deux forces P et P′, puis leur résultante avec P″, cette nouvelle résultante avec P‴, et ainsi de suite, jusqu'à la dernière force. D'où il suit que si l'on construit un polygone APBCD (*fig.* 7), dont les côtés soient égaux et parallèles aux droites AP, AP′, etc., et que l'on joigne le point A au dernier sommet D, la ligne AD représentera, en grandeur et en direction, la résultante de toutes les forces.

On conclut de là que la condition nécessaire et suffisante pour que les forces appliquées à un point libre soient en équilibre, consiste en ce que le point extrême D se confonde avec le point A; c'est-à-dire que le polygone APB...D soit fermé. Lorsque les forces sont au nombre de trois, et que leurs directions ne sont pas dans un même plan, il

est facile de voir que la construction indiquée donne, pour la grandeur et la direction de la résultante, celles de la diagonale du parallélipipède construit sur ces trois forces.

17. Les polygones fermés, plans ou gauches, jouissent de cette propriété, que si on les parcourt entièrement dans l'un ou l'autre sens, la somme des produits de chaque côté par le cosinus de l'angle que fait la direction suivant laquelle il est parcouru, avec une direction fixe, est égale à zéro.

Donc, lorsqu'un système de forces appliquées à un point libre est en équilibre, la somme des produits de ces forces par les cosinus des angles formés par leurs directions avec une même direction quelconque est nulle. Réciproquement, si cette propriété avait lieu relativement à une direction quelconque, le polygone serait nécessairement fermé; et, par conséquent, il y aurait équilibre. Mais il est facile de voir qu'il suffit pour cela qu'elle ait lieu pour trois directions partant d'un même point et non comprises dans un même plan; car, si le polygone n'était pas fermé, la somme dont il s'agit ne pourrait être nulle que pour les directions perpendiculaires à la droite qui joindrait les deux sommets extrêmes; or cette droite ne peut pas être perpendiculaire à trois directions partant d'un même point, et non comprises dans un même plan. Donc, si la somme est nulle pour ces trois directions, le polygone est fermé, et il y a équilibre. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Pour que des forces appliquées à un point libre se détruisent, il est nécessaire et suffisant que les sommes des projections de ces forces sur trois directions non comprises dans un même plan, soient séparément égales à zéro.

Il est clair, d'après ce qui précède, que dans cet énoncé nous regardons comme positives les projections des forces qui font un angle aigu avec la direction fixe, et comme négatives celles des forces qui font un angle obtus. Le plus

ordinairement, on prend ces trois directions perpendiculaires entre elles. Si donc on désigne par α, β, γ les angles formés par la direction d'une force quelconque P, avec les directions des axes positifs X, Y, Z, et que l'on désigne par le signe Σ la somme des termes semblables relatifs à toutes les forces, les conditions de l'équilibre seront exprimées par les équations

$$\Sigma P \cos\alpha = 0, \quad \Sigma P \cos\beta = 0, \quad \Sigma P \cos\gamma = 0.$$

18. Si les forces ne sont pas en équilibre, désignons par R leur résultante, et par a, b, c les angles formés par sa direction avec les axes : il y aura équilibre en introduisant dans le système une force égale à R et directement opposée, c'est-à-dire faisant avec les axes les angles $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$, dont les cosinus sont égaux et de signes contraires à ceux de a, b, c; on aura donc

$$\Sigma P \cos\alpha - R\cos a = 0, \quad \Sigma P \cos\beta - R\cos b = 0,$$
$$\Sigma P \cos\gamma - R\cos c = 0,$$

ou

$$R\cos a = \Sigma P \cos\alpha, \quad R\cos b = \Sigma P \cos\beta, \quad R\cos c = \Sigma P \cos\gamma.$$

Ces équations s'obtiendraient immédiatement par la considération du polygone APBDA, qui montre que la projection de la résultante sur une direction quelconque est égale à la somme algébrique des projections des composantes. Elles déterminent la direction et la grandeur de la résultante. Si l'on fait, pour abréger,

$$\Sigma P \cos\alpha = X, \quad \Sigma P \cos\beta = Y, \quad \Sigma P \cos\gamma = Z,$$

on trouvera $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$,

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

19. L'expression de la résultante peut être rendue indépendante de la direction des axes. En effet, si on forme les carrés de X, Y, Z, en observant que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, et que pour les directions de deux forces P et P′ faisant entre elles un angle désigné par $\widehat{PP'}$, on a

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \cos\widehat{PP'},$$

on obtiendra

$$R^2 = \Sigma P^2 + 2\Sigma PP'\cos\widehat{PP'}.$$

20. On peut obtenir ces résultats par des considérations différentes. Si, suivant la règle du parallélipipède des forces, on décompose chacune des forces P, P′, etc., suivant les trois axes rectangulaires, les composantes de la force quelconque P seront $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$, et l'on remarquera que, d'après les signes des cosinus, ces composantes seront positives quand elles agiront dans le sens des axes positifs, et négatives quand elles agiront en sens contraire. Donc, si l'on fait la somme algébrique des composantes qui sont dans le même axe, on aura la grandeur et le signe de la force à laquelle elles se réduisent. Ainsi toutes les forces seront remplacées par trois autres, agissant suivant les axes, et ayant pour valeurs respectives

$$\Sigma P\cos\alpha, \quad \Sigma P\cos\beta, \quad \Sigma P\cos\gamma.$$

Or il ne pourrait y avoir équilibre si elles n'étaient pas nulles séparément, car elles se composeraient en une seule qui ne serait pas nulle; les conditions nécessaires et en même temps suffisantes pour l'équilibre sont donc

$$\Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P\cos\gamma = 0.$$

S'il n'y a pas équilibre, ces trois forces donneront pour résultante du système, la diagonale du parallélipipède dont

elles seront les arêtes. Si donc on pose

$$\Sigma P \cos\alpha = X, \quad \Sigma P \cos\beta = Y, \quad \Sigma P \cos\gamma = Z,$$

on aura

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

et

$$\cos a = \frac{X}{R}, \quad \cos b = \frac{Y}{R}, \quad \cos c = \frac{Z}{R}.$$

21. *Cas général où les axes sont obliques.* — Si les trois directions, choisies pour la décomposition des forces, ne sont pas rectangulaires, il sera toujours nécessaire et suffisant que les sommes algébriques des composantes soient nulles suivant chaque axe, en affectant de signes contraires celles qui sont en sens opposé. Les trois équations de l'équilibre n'ont pas la même forme, parce que les parallélipipèdes sont obliques; mais elles constituent un système équivalent à celui que donneraient trois axes rectangulaires, puisque l'un et l'autre système sont nécessaires et suffisants pour l'équilibre. Si l'on désigne par X_1, Y_1, Z_1 les composantes positives ou négatives de l'une quelconque des forces données, toutes ces forces pourront être remplacées par trois forces dirigées suivant les axes et représentées, en grandeur et en signe, par les trois sommes

$$\Sigma X_1, \quad \Sigma Y_1, \quad \Sigma Z_1.$$

Les trois forces qu'elles représentent sont donc les composantes de la force qui peut remplacer les forces données, c'est-à-dire de leur résultante, et les conditions d'équilibre de ces forces seront exprimées par les équations

$$\Sigma X_1 = 0, \quad \Sigma Y_1 = 0, \quad \Sigma Z_1 = 0.$$

On arriverait aux mêmes conséquences par la considération des projections des côtés du polygone fermé, parallèlement à trois plans non parallèles à une même droite, et pouvant former un système de plans coordonnés.

22. Nous appellerons quelquefois *force estimée suivant une direction*, la projection de cette force sur cette direction ; c'est la composante déterminée que l'on trouve en décomposant la force en d'autres, dont l'une soit dans cette direction et les autres dans le plan perpendiculaire. Ainsi, dans les formules précédentes, $P\cos\alpha$, $P\cos6$, $P\cos\gamma$ sont respectivement les valeurs de la force P estimée suivant les axes des x, des y et des z.

Équilibre d'un point assujetti à rester sur une surface ou une courbe fixe.

23. Si un point, situé sur une surface qu'il ne peut quitter, est sollicité par une force normale à cette surface, il restera en équilibre ; car toutes les directions suivant lesquelles il pourrait se mouvoir étant semblablement placées par rapport à la force, il n'y a aucune raison pour qu'il prenne l'une plutôt que l'autre, et, par conséquent, il n'en prendra aucune : ce principe est confirmé par toutes les expériences. Mais si le point est sollicité par une force oblique, on peut la décomposer en deux autres, dont l'une soit normale et l'autre dans le plan tangent ; la première est détruite par la résistance de la surface, mais rien ne s'oppose à ce que la seconde mette le point en mouvement, si l'on suppose qu'il puisse se mouvoir librement sur la surface dans toutes les directions. C'est ce qui n'aurait pas nécessairement lieu s'il y avait ce que l'on appelle un frottement ; mais nous en faisons abstraction pour le moment, et nous supposons tous les mouvements entièrement libres sur la surface.

Une surface ne pouvant donc détruire que les forces qui lui sont normales, produit toujours le même effet qu'une force égale à la somme de celles qu'elle détruit et agissant dans la direction normale opposée. Il en est de même de la

résistance d'une courbe sur laquelle un point peut se mouvoir librement. Elle détruit les forces dont la direction est comprise dans le plan normal mené au point d'application, et n'en détruit aucune autre. Sa résistance pourrait donc toujours être remplacée par une force normale, égale et contraire à la résultante de celles qu'elle détruit.

24. Cela posé, soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface sur laquelle doit rester un point sollicité par des forces quelconques, P, P′, etc.; il n'est plus nécessaire, pour son équilibre, que ces forces se détruisent; il suffit que leur résultante soit normale à la surface, et, par conséquent, que les cosinus des angles formés avec les axes par la direction de la résultante soient proportionnels à ceux qui se rapportent à la normale. Or les premiers sont entre eux comme les quantités désignées précédemment par X, Y, Z. Les autres peuvent s'exprimer en fonction de x, y, z au moyen de l'équation de la surface; désignons-les par $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$.

Les conditions d'équilibre sont donc exprimées par les équations

$$\frac{X}{\cos a} = \frac{Y}{\cos b} = \frac{Z}{\cos c}.$$

Si ces équations n'étaient pas satisfaites, il n'y aurait pas équilibre; et si l'on voulait savoir en quel point de la surface les forces proposées seraient détruites, il faudrait trouver les valeurs de x, y, z, qui satisferaient à ces deux équations et à celle de la surface.

Si la surface ne résistait que dans un sens, il faudrait s'assurer si la résultante des forces agit dans le sens contraire, sans quoi elle ne serait pas détruite. Ce cas est celui d'un point qui ne serait que posé sur une surface qu'il ne pourrait pénétrer, mais dont il pourrait être détaché.

25. Si le point était assujetti à rester sur une courbe

donnée, il faudrait, pour qu'il fût en équilibre, que la résultante fût perpendiculaire à la tangente. Or cette dernière ligne fait avec les axes des angles a, b, c dont les cosinus sont déterminés en fonction de x, y, z par les équations de la courbe. La condition d'équilibre sera donc exprimée par l'équation

$$X \cos a + Y \cos b + Z \cos c = 0.$$

Si cette équation n'était pas satisfaite pour le point donné, il n'y aurait pas équilibre. On déterminerait le point de la courbe où les forces données seraient détruites, en cherchant les valeurs de x, y, z, qui satisferaient à cette équation et aux deux équations de la courbe.

Autre manière d'avoir égard à la résistance des surfaces ou des lignes.

26. La résistance d'une surface ou d'une courbe produisant toujours une force normale, on pourrait substituer cette dernière à la surface ou à la courbe, et considérer alors le point comme entièrement libre. La grandeur de cette force sera une des inconnues de la question; sa direction sera dans l'un ou l'autre sens de la normale, s'il s'agit d'une surface, et ne sera assujettie qu'à être perpendiculaire à la tangente, s'il s'agit d'une courbe.

27. Considérons d'abord le cas d'une surface dont l'équation soit $F(x, y, z) = 0$; soient N l'intensité de la force normale qui la remplace, et a, b, c les angles qu'un des deux sens de la normale fait avec les axes; les composantes de N seront

$$\pm N \cos a, \quad \pm N \cos b, \quad \pm N \cos c,$$

les signes supérieurs correspondant à l'un des sens de la normale, et les signes inférieurs à l'autre. Maintenant, le

point devant être considéré comme libre, les deux forces qui le sollicitent doivent être égales et opposées, ainsi que leurs composantes respectives; les équations d'équilibre seront donc

$$X \pm N \cos a = 0, \quad Y \pm N \cos b = 0, \quad Z \pm N \cos c = 0,$$

d'où, en éliminant N,

$$\frac{X}{\cos a} = \frac{Y}{\cos b} = \frac{Z}{\cos c}.$$

Ces deux équations sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre, parce qu'elles en remplacent deux des précédentes, et que la troisième sera toujours satisfaite en prenant une valeur convenable de N et un signe convenable pour le second terme.

Mais on calculera plus facilement N en observant que, puisqu'elle est égale et opposée à la force donnée, sa valeur sera

$$N = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

28. Considérons maintenant un point assujetti à rester sur une courbe dont les équations soient

$$F(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0.$$

La force N, qui remplace la résistance de la courbe, peut avoir une direction normale arbitraire. Les angles a, b, c, que la tangente à la courbe fait avec les axes, sont des fonctions de x, y, z données par les deux équations précédentes. Si l'on désigne par α, β, γ les angles que fait avec les axes la direction de la force N, on aura

$$\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma = 0,$$

et les équations de l'équilibre seront

$$X + N \cos \alpha = 0, \quad Y + N \cos \beta = 0, \quad Z + N \cos \gamma = 0.$$

On éliminera les inconnues α, β, γ, N en multipliant ces équations, respectivement par $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, et les ajoutant; on trouve ainsi, en vertu de la précédente,

$$X \cos a + Y \cos b + Z \cos c = 0,$$

équation nécessaire et suffisante pour que les quatre équations puissent avoir lieu en même temps. Les trois précédentes détermineront la grandeur et le signe des composantes $N \cos \alpha$, $N \cos \beta$, $N \cos \gamma$, qui sont égales et de signes contraires à X, Y, Z, et donneront pour la résistance de la courbe une force égale et opposée à la résultante des forces données, comme cela devait être évidemment.

CHAPITRE III.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DE FORCES PARALLÈLES.

29. *Résultante de deux forces parallèles.* — Soient deux forces P, Q (*fig.* 8) parallèles, et agissant dans le même sens sur deux points A, B liés invariablement entre eux. Appliquons en A et B deux forces égales et contraires, agissant suivant la droite qui joint ces deux points; elles se détruiront, et la résultante totale ne sera pas changée. Soient AM, BN les longueurs qui représentent ces forces. On pourra remplacer P et AM par la force représentée par la diagonale AC; et de même Q et BN par BD. Ces deux directions se rencontrent en un point I, que l'on supposera lié au système, et auquel on appliquera les deux forces AC, BD. Or, si, par ce point I, on mène des parallèles à AB et aux forces, on pourra décomposer chacune des deux forces qui y sont appliquées, de la même manière qu'elles étaient décomposées en A et B, et l'on aura les deux parallélogrammes EIHG, IFLK respectivement égaux à MAPC, BNDQ. Les deux forces EI, IF, égales et opposées,

se détruiront; et il ne restera que les deux forces IH, IK, ou P et Q, qui s'ajouteront. D'où l'on conclut d'abord que *les deux forces ont une résultante qui leur est parallèle, de même sens, égale à leur somme, et dont la direction passe entre* A *et* B. Pour déterminer entièrement sa position, cherchons le point O où elle rencontre AB. Les triangles semblables donnent

$$AO : GH :: IO : IH, \quad KL : BO :: IK : IO.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, et observant que l'on a

$$IH = P, \quad IK = Q, \quad GH = KL,$$

il vient

$$AO : BO :: Q : P,$$

ce qui montre que les deux segments dans lesquels la résultante divise AB sont réciproquement proportionnels aux deux forces; ou que les produits de chaque force par le segment adjacent sont égaux.

Les deux forces P, Q pouvant être représentées par ces deux segments, leur résultante, qui est leur somme, le sera elle-même par la longueur AB; de sorte que chacune des trois forces sera représentée par la partie de la droite AB, comprise entre les directions des deux autres.

Le point O jouit de la propriété remarquable de ne dépendre nullement de la direction absolue des deux forces; il reste le même, pourvu que celles-ci restent parallèles et de même sens, et que les points d'application restent les mêmes; les deux forces peuvent même changer de grandeur, pourvu qu'elles conservent le même rapport. Ce point est celui que nous appellerons spécialement le *point d'application* de la résultante.

Si l'on désigne par R la résultante, la proposition qui vient d'être démontrée est exprimée par les relations sui-

vantes :

$$R = P + Q,$$

$$P : Q : R :: OB : OA : AB.$$

Elles équivalent à trois équations distinctes, et donnent lieu à divers problèmes très-simples que nous nous dispenserons d'examiner. Il suffira toujours, pour les résoudre, que l'on connaisse trois des six quantités P, Q, R, OA, OB, AB.

30. Supposons maintenant les deux forces P, Q dirigées dans des sens différents, et soit $P > Q$.

Décomposons la force P (*fig.* 9) en deux autres parallèles et de même sens, dont l'une soit égale et directement opposée à Q ; cela est possible, d'après la proposition précédente, et l'une de ces composantes détruisant la force Q, la seconde restera seule, et sera, par conséquent, la résultante cherchée. Son point d'application sera en dehors de AB, et du côté de la plus grande force P ; elle sera égale à $P - Q$, et son point d'application X sera déterminé par la proportion

$$AX : AB :: Q : R ;$$

et comme

$$R = P - Q,$$

on aura

$$AX = \frac{Q}{P - Q} \times AB.$$

Ainsi, en exceptant le cas où $P = Q$, deux forces parallèles, et de sens contraire, ont toujours une résultante, qui leur est parallèle, dirigée dans le sens de la plus grande, en dehors des directions des deux forces, et du côté de la plus grande ; elle est égale à leur différence, et chacune de ces trois forces est proportionnelle à la distance des deux autres. Le point X, situé sur la droite qui joint les points d'application des deux forces, est encore indépendant de la

direction et de la grandeur absolue de ces forces ; et c'est encore lui que nous désignerons sous le nom de *point d'application* de la résultante.

Si les deux forces étaient égales, l'inconnue AX deviendrait infinie, ce qui annonce une impossibilité. Il n'y a donc pas alors de résultante, et il est facile de s'en convaincre directement. En effet, supposons que les deux forces égales P et Q (*fig.* 10) aient une résultante, et faisons tourner le système entier de deux angles droits autour du milieu O de AB, de manière que les deux forces P et Q se remplacent l'une l'autre, et, par conséquent, donnent encore la même résultante. Leur résultante primitive sera transportée symétriquement par rapport au point O, si elle est dans le plan des forces ; et, dans le cas contraire, elle ne sera pas dans un même plan avec sa première position. Or, si ces deux forces pouvaient se remplacer l'une l'autre, il y aurait équilibre entre l'une des deux et l'autre, prises en sens contraire, ce qui est absurde, puisque ces deux dernières ne seraient pas directement opposées.

Un pareil système de forces a été nommé *couple* par M. Poinsot, qui en a fait un élément essentiel de la mécanique.

31. Les coordonnées du point d'application de la résultante peuvent facilement être calculées, d'après celles des points d'application des deux forces parallèles.

Supposons d'abord ces deux forces de même sens, désignons-les par P', P'' ; soient M', M'' (*fig.* 11) leurs points d'application, M_1 celui de la résultante qui sera situé entre les deux ; et z', z'', z_1 les coordonnées parallèles à l'axe des z, de ces trois points.

On aura, par ce qui précède,

$$P'.M_1M' = P''.M''M_1.$$

Or, quels que soient les signes des coordonnées, on a la pro-

portion générale

$$M'M_1 : M_1M'' :: z_1 - z' : z'' - z_1.$$

L'équation ci-dessus devient donc, en remplaçant $M'M_1$ et M_1M'' par les quantités proportionnelles,

$$P'(z_1 - z') = P''(z'' - z_1),$$

ou

$$P'z' + P''z'' = (P' + P'')z_1,$$

ou enfin, en désignant par R la résultante,

$$Rz_1 = P'z' + P''z''.$$

Cette équation fait donc connaître z_1; et l'on trouverait semblablement les deux autres coordonnées x_1 et y_1 du point d'application de la résultante.

Si les deux forces P', P'' sont de sens contraire, soit, par exemple, P'' la plus grande, le point d'application M_1 (*fig.* 12) sera en dehors de $M'M''$, et du côté de M''; on aura alors

$$P'.M_1M' = P''.M_1M''.$$

Mais on a généralement

$$M_1M' : M_1M'' :: z_1 - z' : z_1 - z'';$$

donc

$$P'(z_1 - z') = P''(z_1 - z''),$$

ou

$$(P'' - P')z_1 = P''z'' - P'z';$$

et, en désignant par R la résultante qui est dans ce cas $P'' - P'$,

$$Rz_1 = P''z'' - P'z'.$$

On aurait deux équations semblables, pour les coordonnées parallèles aux deux autres axes; et l'on connaîtra

encore les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point d'application de la résultante.

32. *Moments.* — Les équations d'où nous venons de tirer les coordonnées du point d'application de la résultante, expriment un théorème qui sera généralisé tout à l'heure, et qui est d'une application continuelle. Chacun des termes qui les composent est le produit d'une force par la coordonnée positive ou négative de son point d'application, par rapport à un plan quelconque. Un pareil produit se nomme le *moment* de cette force par rapport au plan.

D'après cela, les équations précédentes expriment que le moment de la résultante de deux forces parallèles est égal à la somme des moments des composantes quand elles agissent dans le même sens; et à leur différence quand elles sont de sens contraire. Dans ce dernier cas, le moment qui a le signe — est celui de la force qui est de sens contraire à la résultante.

Pour réduire ces deux énoncés à un seul, il suffit d'employer la considération des signes pour les forces parallèles, et de regarder comme positives celles qui agissent, par exemple, dans le sens de la résultante, et comme négatives celles qui agissent en sens contraire.

Cela posé, en appelant *moment* le produit d'une force, positive ou négative, par sa coordonnée, de signe quelconque, on aura la proposition générale suivante :

Le moment de la résultante de deux forces parallèles quelconques est égal à la somme algébrique des moments des composantes.

33. *Cas d'un nombre quelconque de forces parallèles.* — Considérons maintenant un nombre quelconque de forces parallèles, non situées dans un même plan; et d'abord supposons-les toutes de même sens. En composant deux d'entre elles en une seule, puis cette nouvelle force avec une troisième, et continuant ainsi jusqu'à la dernière

des forces données, on obtiendra une résultante parallèle aux forces et égale à leur somme. Sa direction passera par un point qui ne dépendra que de la position des points d'application des forces données et du rapport de ces forces, mais nullement de leur grandeur absolue ni de la direction à laquelle elles sont parallèles. Tout cela résulte immédiatement de ce qui a été démontré sur la composition de deux forces parallèles.

Si les forces ne sont pas toutes dirigées dans le même sens, on composera en une seule toutes celles qui sont dans un même sens, et le système sera réduit d'abord à deux forces respectivement égales à la somme de celles qui tirent dans chacun des deux sens. Elles se composeront généralement en une seule égale à la différence, tirant dans le sens de la plus grande, et dont le *point d'application* ne dépendra que des positions des points d'application de toutes les forces et du rapport de ces forces. Ce point remarquable se nomme *centre des forces parallèles*.

Si les deux résultantes partielles étaient égales, mais non directement opposées, le système n'aurait pas de résultante; il se réduirait à un couple, et il n'existerait plus de centre des forces parallèles. Si elles sont égales et opposées, il y a équilibre.

31. *Théorème des moments des forces parallèles.* — La proposition que nous avons démontrée tout à l'heure pour deux forces parallèles s'étend facilement à un nombre quelconque. Pour plus de simplicité, partageons le système de toutes ces forces en deux autres, dont le premier renferme toutes les forces P', P'', P''', etc., qui sont dirigées dans un même sens; et le second, toutes les forces Q', Q'', Q''', etc., dirigées dans le sens opposé. Soient R la résultante des forces P', P''', etc., et S celle des forces Q', Q'', etc.

En composant d'abord P' et P'', on a une résultante P_1 dont le moment, par rapport à un plan quelconque, est

égal à la somme des moments de P′ et P″, d'après ce qui a été démontré précédemment. Composant ensuite P_1 et P‴ en une nouvelle résultante P_2, le moment de cette dernière sera égal à la somme de ceux de P_1 et P‴, et, par conséquent, à la somme des moments de P′, P″, P‴. En continuant ainsi, on arrive évidemment à cette conséquence, que le moment de la résultante R est égal à la somme de ceux des forces du premier groupe P′, P″, etc. De même, le moment de la résultante S est égal à la somme des moments des forces Q′, Q″, Q‴, etc., du second groupe, qui sont toutes dirigées en sens contraire des premières.

Or, si les deux forces R, S ne forment pas un couple, elles se réduisent à une seule force qui sera la résultante définitive du système proposé, et dont le moment sera égal à la somme algébrique des moments de R et S, en considérant comme positive celle qui est dirigée dans le même sens que la résultante, et comme négative celle qui est dirigée en sens contraire. Supposons, par exemple, que cette dernière soit S, et que les coordonnées des points d'application de R et S soient respectivement r, s ; le moment de la résultante du système sera

$$Rr - Ss;$$

c'est-à-dire qu'il sera égal à la somme des moments des forces qui sont dirigées dans le même sens que la résultante, moins la somme des moments des autres. D'où l'on voit que cet énoncé se simplifiera, en attribuant implicitement le signe — aux forces dirigées en sens contraire de la résultante, et l'on obtient ce théorème général :

Le moment de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles est égal à la somme algébrique des moments de ces forces par rapport à un plan quelconque.

On peut remarquer qu'on peut aussi bien convenir de donner le signe implicite — aux forces dirigées dans le sens de la résultante, en y comprenant cette dernière, pourvu

qu'on donne le signe + à celles qui sont de sens contraire; car cela ne ferait que changer de signe tous les termes des équations.

35. *Coordonnées du centre des forces parallèles.* — Le théorème des moments donne immédiatement l'expression des coordonnées du centre des forces parallèles, au moyen de celles des points d'application des forces données, et des valeurs positives ou négatives de ces forces. Il suffit de considérer successivement les moments par rapport aux trois plans coordonnés rectangulaires ou obliques. Soient P, P′, P″, etc., les valeurs algébriques des forces du système; x, y, z, x', y', z', etc., les coordonnées de leurs points d'application; R la valeur de leur résultante générale, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son point d'application, c'est-à-dire du centre des forces parallèles; on aura les quatre équations suivantes pour déterminer R et x_1, y_1, z_1 :

$$R = P + P' + P'' + \ldots,$$
$$R x_1 = P x + P' x' + P'' x'' + \ldots,$$
$$R y_1 = P y + P' y' + P'' y'' + \ldots,$$
$$R z_1 = P z + P' z' + P'' z'' + \ldots.$$

Il faut excepter, comme nous l'avons dit, le cas où le système se réduit à un couple; ce qui aura lieu si l'on a $R = 0$, sans qu'il y ait équilibre. Nous nous bornons, pour le moment, à cette simple indication; nous aurons bientôt l'occasion d'entrer dans plus de détails à cet égard.

CHAPITRE IV.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES COUPLES.

36. La considération des couples est due à M. Poinsot, qui a fait connaître les lois remarquables de leur composition et leur usage dans la mécanique. Nous ne ferons, à

cet égard, que reproduire la théorie de cet illustre géomètre.

On nomme *bras de levier* d'un couple la perpendiculaire comprise entre les directions des deux forces qui le composent, et aux extrémités de laquelle on peut supposer ces forces appliquées. Le *moment* d'un couple est le produit de l'une de ces forces par le bras de levier.

Il y a à distinguer deux sens pour les couples qui sont dans un même plan. A cet effet, on imaginera que l'on fixe le milieu du bras de levier de chacun d'eux, et que ces bras de levier prennent le mouvement que tendent à leur imprimer les forces qui sont appliquées. Il peut y avoir deux sens différents pour ces mouvements, et les couples pour lesquels ils seront les mêmes seront dits *couples de même sens*.

Pour désigner d'une manière commode le sens d'un couple, nous concevrons, par le milieu de son bras de levier, une perpendiculaire à son plan, du côté où un observateur, placé le long de cette ligne, les pieds contre le plan, verrait le mouvement s'exécuter de gauche à droite. La direction de cette perpendiculaire, prise à partir du plan, est ce que nous nommerons la *direction de l'axe du couple*.

Cela posé, nous allons démontrer ce premier théorème.

37. *Un couple peut, sans changer d'action, être transporté d'une manière quelconque, pourvu que son axe reste parallèle et de même sens, et que son nouveau bras de levier soit lié invariablement au premier.*

Le plan du couple reste alors parallèle à lui-même, mais les forces peuvent changer de direction. Nous examinerons d'abord le cas où elles restent parallèles à elles-mêmes.

Soient AB, A'B' (*fig.* 13) les deux bras de levier, qui sont alors parallèles, et $\overline{P, AB}$ le couple proposé; appliquons en A', ainsi qu'en B', deux forces P', P'' égales et paral-

lèles à P et de sens opposés; l'ensemble de ces six forces produira évidemment le même effet sur le système que les deux premières, puisque les quatre autres se détruisent deux à deux. Or les deux forces égales et de même sens, appliquées en A et B′, donnent une résultante parallèle et de même sens égale à leur somme, et appliquée au milieu O de AB′, qu'on supposera lié invariablement à ces deux points; de même les forces appliquées en B et A′ donnent une résultante appliquée au milieu de A′B, supposé lié aux points B et A′. Ces deux résultantes sont égales, de sens opposés, et appliquées au même point; car les lignes AB′, BA′, diagonales du parallélogramme ABA′B′, se coupent en leur milieu : elles se détruisent donc, et il ne reste que le couple $\overline{P', A'B'}$, qui n'est autre chose que le couple primitif transporté parallèlement à lui-même.

Considérons maintenant le cas où le second bras de levier A′B′ ne serait pas parallèle au premier. Nous pourrons, d'après ce qui vient d'être démontré, transporter le couple proposé parallèlement à lui-même, de manière que le milieu de son bras de levier coïncide avec le milieu O de A′B′ (*fig.* 14); et il reste à démontrer que le couple $\overline{P, AB}$ aurait la même action sur le système, si on le faisait tourner dans son plan, de manière que son bras de levier AB vînt coïncider avec A′B′ qu'on supposerait lié invariablement avec le système. Pour cela, appliquons en A′ ainsi qu'en B′ deux forces P′, P″ perpendiculaires à A′B′, égales à P et en sens contraire l'une de l'autre; ces quatre forces ne changeront rien à l'action du couple proposé, puisqu'elles se détruisent deux à deux. Mais les deux forces égales P, P″, que l'on peut supposer appliquées au même point D lié au système, donnent une résultante dirigée suivant la bissectrice DO de leur angle, qui est égale et opposée à celle des forces P, P″, appliquées en C : il ne reste donc plus que le couple $\overline{P', A'B'}$.

Donc l'action d'un couple reste la même quand on le transporte de manière que son axe reste parallèle à lui-même et de même sens, et que son nouveau bras de levier soit lié invariablement au premier.

38. *Un couple peut toujours être remplacé par un autre de même sens, situé dans le même plan et ayant même moment.*

Soit un couple quelconque $\overline{P, AB}$ (*fig.* 15); prolongeons son bras de levier d'une longueur quelconque BC, et appliquons aux points B, C des forces égales et opposées Q, Q', telles que l'on ait $Q \times BC = P \times AB$; ces quatre forces ne changeront rien à l'action du couple proposé. Mais les deux forces P, Q' appliquées en A et C, auront une résultante égale à leur somme, et appliquée en B, en vertu de l'égalité précédente. Cette résultante sera égale à la somme des forces P, Q' appliquées à ce même point en sens contraire; ces forces se détruisent, et, par conséquent, il ne reste plus que deux forces formant un couple $\overline{Q, BC}$ de même sens et de même moment que le couple proposé. Et comme on peut ensuite le transporter de manière que son axe reste parallèle à lui-même, on arrive, en réunissant ces divers résultats, à la proposition suivante :

Un couple peut être remplacé par tout autre dont l'axe est parallèle au sien, et de même sens, et dont le moment est le même.

L'action d'un couple est donc complétement déterminée par la direction de son axe et par son moment. Nous supposerons dorénavant que le moment soit représenté par une longueur portée sur la direction de l'axe, à partir de son origine; de cette manière, les couples seront figurés géométriquement, comme les forces, par une ligne donnée en grandeur et en direction. Seulement, dans le cas des couples, cette ligne pourra être transportée parallèlement à elle-même d'une manière quelconque, tandis que, dans le

cas des forces, elle ne peut l'être que le long de sa propre direction.

Si le moment d'un couple est égal à zéro, il faut que la force ou le bras de levier soit nul, et, dans les deux cas, il y a équilibre.

Composition des couples.

39. *Cas où leurs axes sont parallèles.* — Ces couples, ayant leurs plans parallèles, peuvent être tous ramenés dans un seul plan; et, en leur conservant respectivement les mêmes moments, on peut leur donner à tous un bras de levier égal, et les placer de manière que tous les bras de levier coïncident. Les forces relatives aux couples de même sens coïncideront alors en direction, et celles qui se rapportent aux couples de sens différents seront directement opposées aux premières. A chacune des extrémités du bras de levier commun, elles se composeront en une seule égale à la différence entre la somme de celles qui agissent dans un sens et la somme de celles qui agissent en sens contraire, et dirigée dans le sens de la plus grande de ces deux sommes. Ces deux résultantes formeront donc un couple ayant le bras de levier commun, et pour moment le produit de l'une de ces résultantes par ce même bras de levier : ce moment sera donc évidemment égal à la différence entre la somme des moments des couples agissant dans un sens et la somme des moments des couples de sens opposé, et il agira lui-même dans le sens de la plus grande de ces deux sommes; ce que nous exprimerons en disant, pour abréger, que son moment est la somme algébrique des moments des couples composants, en regardant comme positifs ceux des couples qui agissent dans un sens, et comme négatifs ceux des couples qui agissent en sens contraire. Ce couple résultant pourra, d'ailleurs, être transporté et transformé d'après les

principes précédents. Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

Pour composer des couples dont les axes sont parallèles, on transportera tous ces axes de manière qu'ils aient leur origine en un même point ; on les composera comme s'ils représentaient des forces en grandeur et en direction ; et la résultante ainsi obtenue représentera en grandeur et en direction l'axe du couple résultant.

40. *Cas des axes non parallèles.* — Considérons d'abord deux couples seulement, et ramenons leurs axes à avoir leur origine en un même point A. Soient AB, AC (*fig.* 16) ces axes en grandeur et en direction. Les plans de ces couples couperont le plan BAC suivant deux droites AM, AN respectivement perpendiculaires à AB, AC et passant au point A. Donnons aux deux couples des bras de levier AM, AN respectivement égaux à AB, AC, qui représentent leurs moments ; les forces appliquées à ces bras de levier auront alors une même intensité égale à l'unité. Enfin, transportons ces couples de manière qu'ils aient chacun une force de même sens appliquée en A. Les droites MA, NA, qui représentent les moments des couples, sont disposés de manière que si l'on fait tourner leur système d'un angle droit autour de A, de manière que AM vienne coïncider avec AB, AN coïncidera alors avec AC ; et la diagonale AO du parallélogramme construit sur AM et AN coïncidera avec la diagonale AD du parallélogramme BACD.

Cela posé, transportons le couple qui est sur AB de manière que son bras de levier soit le côté ON ; une de ses forces détruira celle qui est appliquée en N, et les quatre forces se réduiront à un couple ayant pour bras de levier OA, et dont l'axe sera dirigé suivant la diagonale AD du parallélogramme BACD, qui est perpendiculaire au plan du couple et située du côté convenu. De plus, les forces qui constituent ce couple résultant étant égales à celles des

deux autres, son moment devra aussi être représenté par son bras de levier AO, ou par son égal AD; d'où résulte ce théorème :

Deux couples, dont les axes ne sont pas parallèles, se composent en un autre dont l'axe est représenté en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les axes des deux couples composants.

On pourra composer ainsi un nombre quelconque de couples, et l'on renfermera les deux cas dans une seule proposition qui s'énoncera comme il suit :

Pour composer un nombre quelconque de couples dont les axes ont des grandeurs et des directions quelconques, il faut transporter ces axes parallèlement à eux-mêmes, de manière qu'ils aient tous leur origine en un même point, et les composer comme s'ils représentaient des forces en grandeur et en direction. La résultante, ainsi obtenue, sera, en grandeur et en direction, l'axe du couple résultant.

Toutes les questions relatives à la composition et décomposition des forces appliquées en un même point se reproduiraient ici pour les couples. On aurait le théorème du parallélipipède des axes comme on a eu celui du parallélipipède des forces, et les relations entre les axes composants et l'axe résultant seraient les mêmes qu'entre les trois arêtes d'un parallélipipède et sa diagonale ; nous ne croyons pas nécessaire de revenir sur ces détails.

Conditions d'équilibre des couples.

41. Si les axes des couples sont parallèles, c'est-à-dire si ces couples sont dans un même plan ou dans des plans parallèles, la condition nécessaire et suffisante pour leur équilibre est que la somme algébrique de leurs moments soit nulle, puisque cette somme est le moment du couple résultant.

Si les axes des couples ne sont pas parallèles, il faudra,

d'après l'identité de la composition des axes et de celle des forces, que les sommes algébriques des projections des axes sur trois droites non situées dans un même plan, soient séparément nulles. Si tous les axes étaient dans un même plan, il suffirait que ces sommes fussent nulles relativement à deux droites non parallèles situées dans ce plan. Ce cas est celui où les plans de tous les couples sont perpendiculaires à un même plan.

CHAPITRE V.

CONDITIONS ET ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME RIGIDE QUELCONQUE, ENTIÈREMENT LIBRE.

42. *Réduction générale.* — Toute force peut être remplacée par une force égale appliquée en un point quelconque lié à son point d'application, et par un couple formé d'une force égale et opposée à cette dernière et de la force proposée. Car cela revient à introduire deux forces qui se détruisent.

Si l'on fait cette décomposition pour toutes les forces d'un système, en choisissant le même point pour toutes, on aura toutes ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes, en un même point, et de plus autant de couples situés, en général, dans des plans différents.

En composant, d'une part, toutes les forces, et, d'une autre, tous les couples, le système se trouvera réduit à une seule force et un seul couple.

Or, un couple ne peut être détruit par une force, car alors il pourrait être remplacé par une force égale et opposée. Donc les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système rigide soit en équilibre, sont que la force et le couple soient séparément nuls. Chacune de ces conditions s'exprime, en général, par trois équations. L'équilibre du système est donc exprimé par six équations.

Avant de passer au cas général, nous considérerons en particulier celui où les forces sont parallèles. Il se déduirait facilement du cas général; mais il est plus simple de le traiter directement.

Équilibre et composition des forces parallèles.

43. Supposons d'abord les forces situées dans un même plan, et d'un point quelconque O abaissons une perpendiculaire sur leurs directions : elle les rencontrera en des points que nous rapporterons au point O comme origine, et qui seront donnés par leurs abscisses positives ou négatives.

Soient P une quelconque des forces, et x l'abscisse correspondante : on la remplacera par une force égale et de même sens agissant en O, et un couple ayant pour moment Px.

Or, si l'on considère successivement des forces dans des sens différents et des abscisses positives et négatives, on reconnaît facilement que le sens du couple change lorsqu'une seule des quantités P et x change de sens, et que le sens du couple ne change pas lorsque ces deux quantités restent de même sens ou en changent à la fois. Donc, si les forces sont considérées comme positives dans un sens et négatives en sens contraire, le produit Px est de même signe pour les couples de même sens, et de signe contraire pour des couples de sens opposé. La somme algébrique de ces produits, faite pour toutes les forces du système, et que nous exprimerons par $\Sigma \mathrm{P}x$, donne donc la valeur du moment du couple résultant, et le sens de ce couple. Si elle est positive, ce couple est dans le sens de ceux qui correspondent à une force positive et une abscisse positive : il est de sens contraire si la somme est négative. D'après cela, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre

seront

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma P x = 0.$$

44. On appelle *moment d'une force par rapport à un point* le produit de cette force par la distance de ce point à la droite suivant laquelle elle agit. En employant cette dénomination, on énoncera, de cette manière, les conditions de l'équilibre qui viennent d'être établies :

Pour que des forces parallèles situées dans un même plan et appliquées à un système de points liés invariablement entre eux et libres dans l'espace, soient en équilibre, il est nécessaire et suffisant que la somme algébrique de ces forces soit nulle, ainsi que la somme algébrique de leurs moments par rapport à un point quelconque du plan.

Si ces deux conditions sont remplies relativement à un certain point du plan, l'équilibre aura lieu, et, par conséquent, la somme des moments des forces par rapport à tout autre point du plan sera nulle. C'est, au reste, ce qu'on vérifierait immédiatement en faisant usage des deux équations données.

45. Si l'équilibre n'a pas lieu, c'est-à-dire si l'on n'a pas à la fois $\Sigma P = 0$, $\Sigma P x = 0$, on peut se proposer de déterminer la résultante, s'il y en a une : soient R sa valeur positive ou négative, et x_1 l'abscisse qui lui correspond ; il y aura équilibre dans le système, en y joignant une force égale et directement opposée, d'où résulte

$$-R + \Sigma P = 0, \quad -R x_1 + \Sigma P x = 0,$$

ou

$$R = \Sigma P, \quad R x_1 = \Sigma P x, \quad x_1 = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}.$$

On peut donc toujours établir l'équilibre en introduisant une force $-R$, et, par conséquent, le système proposé peut être remplacé par la force R égale et opposée à $-R$;

excepté dans le cas où l'on aurait $\Sigma P = 0$ sans avoir $\Sigma P x = 0$; on trouverait alors x_1 infini; et, en effet, c'est le cas où le système se réduit à un couple. Dans tout autre cas, il existe une résultante égale à la somme algébrique des composantes, et située à une distance du point O égale à la somme algébrique des *moments des forces par rapport à ce point*, divisée par la somme des forces.

46. Supposons maintenant que les forces ne soient pas dans un même plan; menons un plan quelconque perpendiculaire à leurs directions, et deux autres plans parallèles aux forces et faisant entre eux un angle quelconque; ils couperont le premier suivant deux droites que nous prendrons pour axes des x et y, et nous supposerons que l'on donne les coordonnées des points où les forces percent le plan XY.

Cela posé, soient x, y les coordonnées du point I (*fig.* 17), où une force quelconque P perce le plan XY, coordonnées qui sont égales à celles du point d'application de la force. On pourra remplacer cette force par une autre, égale et de même sens, appliquée en A, et un couple ayant pour bras de levier AI. Menons par le point I deux parallèles IB, IC aux axes des x et des y, et par le point C concevons deux forces égales et parallèles à P et de sens contraires; nous aurons ainsi, au lieu du premier couple, deux autres couples ayant pour bras de levier AC et CI, et P pour force. Le premier sera dans le plan ZY, le second dans un plan parallèle à ZX, et pourra être transporté dans ce dernier plan, où AB sera son bras de levier. Leurs moments seront respectivement Py, Px, et l'on verrait comme dans le cas précédent qu'en prenant avec des signes contraires les forces et les coordonnées qui sont en sens contraires, les couples situés dans les plans ZX, ZY se réduisent à deux couples situés respectivement dans ces mêmes plans et ayant pour moments $\Sigma P x$, $\Sigma P y$.

Ils se composent en un seul qui ne peut être nul que s'ils sont tous les deux nuls séparément. Les conditions de l'équilibre du système sont donc

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma P x = 0, \quad \Sigma P y = 0.$$

47. Si les forces ne sont pas en équilibre, et qu'elles aient une résultante R, qui perce le plan XY en un point dont les coordonnées soient x_1, y_1, il y aura équilibre si l'on introduit une force — R appliquée au même point; et réciproquement, si l'équilibre a lieu de cette manière, R sera la résultante du système. Il est donc nécessaire et suffisant que R, x_1, y_1 puissent être déterminés par les équations suivantes :

$$-R + \Sigma P = 0, \quad -R x_1 + \Sigma P x = 0, \quad -R y_1 + \Sigma P y = 0;$$

d'où

$$R = \Sigma P, \quad R x_1 = \Sigma P x, \quad R y_1 = \Sigma P y.$$

Ces équations ne sont incompatibles que quand x_1 ou y_1 deviennent indéfinis, c'est-à-dire quand on a $\Sigma P = 0$, sans avoir en même temps $\Sigma P x = 0$, $\Sigma P y = 0$; et c'est, en effet, le cas où le système se réduit à un couple.

48. Dans toutes les formules précédentes, x et y désignent les coordonnées des points où les directions des forces percent le plan XY. Elles sont les mêmes que celles des points d'application de ces forces, dont la coordonnée z n'entre pas dans les équations qui expriment l'équilibre, dans le système d'axes qui a été adopté; et l'on pourrait même remplacer les x et y par des droites parallèles à une direction arbitraire, et terminées respectivement aux mêmes plans ZX et ZY; car on ne ferait que multiplier tous les termes des équations par un même nombre. Si, pour chacun des plans ZX, ZY, qui font toujours entre eux un angle quelconque, on substitue aux x et y des systèmes quelconques de parallèles affectées des mêmes signes que ces

coordonnées, et qu'on appelle, comme précédemment, *moment d'une force par rapport à un plan*, le produit de cette force par la valeur algébrique de cette distance oblique ou rectangulaire de son point d'application à ce plan; les équations précédentes s'énonceront comme il suit :

1°. *Pour qu'un système de forces parallèles soit en équilibre, il est nécessaire et suffisant que la somme algébrique des forces soit nulle, et que la somme de leurs moments par rapport à deux plans qui se coupent suivant une ligne parallèle aux forces, soit nulle pour chacun de ces plans.*

2°. *La résultante d'un système de forces parallèles est égale à la somme algébrique de ces forces; et son moment par rapport à un plan quelconque parallèle aux forces est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

3°. *Le seul cas où des forces parallèles n'ont pas de résultante est celui où leur somme est nulle, sans que la somme de leurs moments par rapport à deux plans parallèles aux forces le soit elle-même pour chacun de ces plans.*

49. La résultante passant toujours par un même point, qui est le centre des forces parallèles, quelque direction que l'on donne au système, en faisant tourner les forces autour de leurs points d'application, il s'ensuit, comme nous l'avions déjà démontré (n° 6), que *le moment de la résultante par rapport à un plan quelconque est égal à la somme des moments des composantes par rapport à ce plan;* car, en amenant les forces à être parallèles à ce plan sans cesser d'être parallèles entre elles et de conserver leurs sens respectifs, et sans changer leurs points d'application, on rentre dans le cas précédent, et le théorème est démontré, puisque les moments sont restés les mêmes, malgré le changement de direction des forces.

Il suit de là que, pour avoir la distance positive ou négative du centre des forces parallèles à un plan quelconque,

il faut diviser la somme algébrique des moments des forces par rapport à ce plan, par la somme algébrique des forces. On déterminera donc les trois coordonnées de ce point, en prenant les sommes des moments par rapport aux trois plans coordonnés, et les divisant par la somme des forces. On retombe ainsi sur la règle donnée (n° 35).

On voit que, pour que le centre des forces parallèles soit situé dans un certain plan, il est nécessaire et suffisant que la somme des moments des forces par rapport à ce plan soit égale à zéro.

Équilibre de forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace.

50. Quoiqu'il soit plus commode pour le calcul de prendre des axes de coordonnées rectangulaires, il est cependant nécessaire de traiter la question plus généralement; et nous supposerons les axes obliques.

Nous allons commencer par réduire le système total des forces à trois forces dirigées suivant les axes de coordonnées, et à trois couples situés dans les plans de ces axes pris deux à deux.

Soient P, P', P'',... les forces données; (X, Y, Z), (X', Y', Z'),... leurs composantes positives ou négatives; et (x, y, z), (x', y', z'),... les cordonnées de leurs points d'application respectifs.

Considérons l'une quelconque des forces données, par exemple la force P (*fig.* 18), appliquée au point M; supposons, pour fixer les idées, que ses trois composantes X, Y, Z soient dans le sens des axes positifs, et, de plus, que les coordonnées x, y, z du point d'application M soient positives. La force Z peut être remplacée par une force égale et parallèle appliquée en A, et un couple situé dans le plan MAZ; ce couple peut être décomposé en deux

autres, $\overline{Z, AB}$, $\overline{Z, AC}$, situés dans les plans zx, zy. On remarquera que AB, AC ne sont pas les bras de levier de ces couples, puisqu'ils font avec les forces de ces couples des angles égaux à ceux des axes des coordonnées situés dans leurs plans. Mais pour les couples que chaque force P donnera dans un même plan coordonné, l'angle des forces et du bras de levier oblique sera toujours le même, puisqu'il sera celui des axes de coordonnées, et par conséquent il n'y a aucun inconvénient à prendre, au lieu de leur moment, le produit de la force par le bras de levier oblique; car ces produits ne différeront des moments que par un facteur constant, et l'on aura la même équation en égalant leur somme algébrique à zéro. Quant aux signes de ces moments, nous considérerons comme positifs ceux des couples dont l'axe serait du même côté de leur plan que l'axe des coordonnées positives qui n'y est pas renfermé.

Les moments des couples $\overline{Z, AB}$, $\overline{Z, AC}$ seront donc exprimés par $-Zx$ et $+Zy$.

Chacune des forces X et Y donnera semblablement une force égale et parallèle appliquée en A, et deux couples dont les moments se déduiront des précédents par des changements de lettres dont la loi est facile à saisir; ils seront, pour la première, $-Xy$, $+Xz$; et, pour la seconde, $-Yz$, $+Yx$.

Réunissant les moments des couples situés dans le même plan, on aura, au lieu de la force P, ses trois composantes X, Y, Z appliquées au point A, et trois couples situés dans les plans coordonnés, et ayant respectivement pour moments, à des facteurs constants près,

$$yZ - zY \ldots, \quad zX - xZ \ldots, \quad xY - yX \ldots.$$

Une discussion semblable à celle que nous avons faite dans le cas des forces parallèles démontrerait la généralité de ces expressions, en considérant les coordonnées x, y, z

et les composantes X, Y, Z comme positives quand elles sont dirigées respectivement dans le même sens que les axes AX, AY, AZ, et comme négatives quand elles sont dirigées en sens contraire.

Si l'on fait la même décomposition pour toutes les forces du système, et qu'on indique par Σ la somme des termes semblables relatifs à toutes les forces, on trouvera, en égalant à zéro les expressions des trois résultantes dirigées suivant AX, AY, AZ, ainsi que des trois couples résultants situés dans les plans coordonnés,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Telles sont les équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système rigide entièrement libre.

Dans le cas où les axes sont rectangulaires, désignons par α, β, γ les angles que la direction que la force quelconque P fait avec les axes positifs; on aura

$$X = P\cos\alpha, \quad Y = P\cos\beta, \quad Z = P\cos\gamma,$$

et ces six équations d'équilibre deviendront

$$\Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P\cos\gamma = 0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0, \quad \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0,$$
$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0.$$

Cas où les forces sont situées dans un même plan.

51. Si toutes les forces étaient dans un même plan, par exemple dans le plan XY, les composantes Z seraient nulles ainsi que les coordonnées z, et les six équations générales se réduiraient aux trois suivantes :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Si l'on voulait traiter directement ce cas particulier, il n'y aurait qu'à suivre la même marche que dans le cas général, en partant des données plus simples de la question actuelle. On prendrait deux axes AX, AY (*fig.* 19), dans le plan des forces, et l'on substituerait à une force quelconque P ses deux composantes X, Y, parallèles aux axes. On remplacerait ensuite X par une force égale et parallèle appliquée en A, et le couple $\overline{X, BM}$; de même Y pourrait être remplacée par une force égale et parallèle appliquée en A, et le couple $\overline{Y, AB}$. Les bras de levier obliques de ces couples faisant avec les forces un même angle, qui est celui des axes de coordonnées, on pourra prendre pour les moments les produits des forces par ces bras de levier, qui sont les coordonnées des points d'application des forces. Dans le cas où les deux composantes X, Y, ainsi que les coordonnées x, y, sont dirigées dans le sens des axes positifs, on a deux couples de sens contraires dont la somme des moments est $xY - yX$, en considérant comme positifs ceux dont le sens est celui de la rotation de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs; et l'on reconnaîtrait, comme précédemment, que si le sens des composantes et des coordonnées change, il faut conserver cette même expression, en y considérant comme négatives les quantités dont la direction a changé. De cette manière, les résultantes des forces dirigées suivant les axes seront ΣX, ΣY, et le moment du couple résultant sera $\Sigma(xY - yX)$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre seront donc

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

52. La dernière peut se présenter sous une autre forme, en décomposant la force quelconque P en une force égale et parallèle appliquée en A, et un couple ayant pour moment Pp, p désignant la distance de la force P au point A. Décomposant, suivant les deux axes, la force appliquée en

A, et faisant la même transformation pour toutes les forces, on réduira le système à deux forces ΣX, ΣY, dirigées suivant les axes, et un couple ayant pour moment ΣPp, les termes de cette dernière somme étant considérés comme de mêmes signes ou de signes contraires, suivant que les couples sont de même sens ou de sens contraire. Les équations d'équilibre seront donc

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Pp = 0.$$

La troisième, qui est la seule dont la forme soit changée, exprime que *la somme des moments des forces, par rapport à un point quelconque du plan, est nulle.*

CHAPITRE VI.

ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME RIGIDE, QUI N'EST PAS ENTIÈREMENT LIBRE.

53. *Cas d'un point fixe.* — Si l'on prend le point fixe pour origine, les trois forces dirigées suivant les axes seront détruites par la résistance de ce point. Or, des couples appliqués à un système qui renferme un point fixe doivent se faire équilibre comme si le corps était entièrement libre; car, s'ils donnaient un couple résultant différent de zéro, on pourrait le transporter de manière qu'une de ses forces passât par le point fixe, qui la détruirait: il resterait donc une force qui ne passerait pas par le point fixe, et mettrait ce système en mouvement. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système seront donc

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Les couples se détruisant indépendamment du point fixe, n'exercent aucun effort sur lui, et ne tendent qu'à rompre le système. Le point fixe n'est donc sollicité que par la résultante des forces ΣX, ΣY, ΣZ; cette résultante est

égale et opposée à la force que développe ce point pour établir l'équilibre.

Un corps qui peut tourner librement autour d'un point fixe, constitue la machine que l'on nomme *levier;* le point fixe se nomme *point d'appui.* On voit donc que l'équilibre du levier exige que les couples qui naissent du transport de toutes les forces parallèlement à elles-mêmes au point d'appui, se détruisent d'eux-mêmes. S'il n'y a que deux forces, il faut alors qu'elles soient dans un même plan avec le point d'appui, et que les deux couples qu'elles produisent soient de sens contraires et aient des moments égaux. Ces moments sont aussi les moments des forces par rapport au point d'appui.

La résultante des forces transportées au point d'appui, constituant tout ce qui n'est pas détruit par la rigidité seule du corps, ne l'est que par le point d'appui et forme ce que l'on appelle la *charge* de ce point.

Si le levier n'était que posé sur une surface solide sur laquelle il pourrait glisser librement, il faudrait pour l'équilibre que cette résultante fût normale à la surface fixe.

54. *Cas d'un axe fixe.* — Si deux points du système sont fixes, tous les points situés sur la droite qui les renferme sont invariables de position, et le corps est dans le même cas que s'il était assujetti à tourner autour d'un axe fixe, dont les points seraient susceptibles d'offrir en tous sens une résistance indéfinie. Si l'on prend cette droite pour axe des z, les trois forces dirigées suivant les axes seront détruites, ainsi que les couples qui sont situés dans les deux plans qui passent par l'axe des z, et dont les bras de levier pourraient être transportés sur cet axe même. Il ne reste donc plus que le couple résultant situé dans le plan xy, et qui ne saurait être détruit par l'axe fixe. La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est donc,

dans ce cas,

$$\Sigma(xY - yX) = 0.$$

55. Pour connaître les efforts exercés sur l'axe fixe, il faut composer les forces qu'il détruit. Les couples situés dans le plan ZX et la force ΣX se réduisent à une force qui rencontre l'axe, à moins que l'on n'ait $\Sigma X = 0$, auquel cas on aurait un couple seulement : il en est de même dans le plan ZY. Outre ces efforts appliqués à l'axe, il y a encore la force ΣZ qui tend à l'entraîner dans le sens où elle est dirigée. L'axe produit donc des forces égales et contraires à celles-ci, puisqu'il les tient en équilibre.

Si deux points seulement du système sont fixes, les résistances ne peuvent provenir que des deux points, et l'on devra décomposer les forces qui rencontrent l'axe en d'autres qui passent par ces points, et feront connaître les forces qu'ils produisent pour détruire celles-ci. Quant à la force dirigée suivant la droite qui les joint, elle peut être décomposée d'une infinité de manières en deux autres appliquées à ces points ; et il en serait de même s'il y avait un plus grand nombre de points fixes sur la même droite.

56. On pourrait supposer que le corps eût la liberté de glisser le long de l'axe fixe, et en même temps de tourner autour de lui. Dans ce cas, l'axe détruirait toutes les forces dont la direction lui serait perpendiculaire, et n'en pourrait détruire aucune autre. Il faudrait donc décomposer chaque force qui rencontre l'axe en deux autres, l'une suivant l'axe, l'autre perpendiculaire. Mais alors il est plus simple de prendre des axes rectangulaires, et les conditions d'équilibre seront exprimées par les deux équations

$$\Sigma P\cos\gamma = 0, \quad \Sigma P(x\cos6 - y\cos\gamma) = 0.$$

On connaîtra la résistance de l'axe en composant les couples situés dans les plans ZX, ZY, et les forces dirigées suivant les axes des x et des y.

Si le corps ne pouvait que glisser sans tourner, l'équation $\Sigma P \cos\gamma = 0$ serait suffisante et nécessaire, et le couple situé dans le plan xy ferait connaître la résistance opposée par l'axe à la torsion.

La machine que l'on nomme *tour* ou *treuil*, n'est autre chose qu'un corps solide qui a la liberté de tourner sans glisser autour d'un axe fixe. Ce qui précède fait donc connaître la condition d'équilibre de cette machine et la charge que supporte l'axe.

Lorsque les forces se réduisent à deux, situées dans des plans perpendiculaires à l'axe, la condition d'équilibre consiste en ce que ces forces sont en raison inverse de leur distance à l'axe.

57. *Remarque.* — Les deux derniers cas particuliers que nous venons de traiter donnent une interprétation, qu'il est bon de connaître, aux six équations de l'équilibre relatives à des axes coordonnés rectangulaires. Si l'on considère trois droites rectangulaires qui se coupent en un même point, et qu'on fixe l'une quelconque d'entre elles de manière que le corps n'ait que la liberté de glisser le long de cet axe sans tourner, les trois premières équations d'équilibre expriment que les forces données ne permettront aucun de ces trois mouvements. Les trois autres expriment que si le corps avait successivement la liberté de tourner sans glisser autour de chacun des mêmes axes successivement, aucun de ces mouvements ne sera produit par les mêmes forces.

Ces trois dernières équations peuvent être énoncées d'une manière qu'il n'est pas inutile de connaître. Si, par le point d'application de la force P, on mène un plan perpendiculaire à AZ qui coupe cette ligne en O, et qu'on décompose la force en une force parallèle à cet axe et une autre située dans le plan perpendiculaire, la première sera $P\cos\gamma$, et la seconde $P\sin\gamma$ sera la résultante des forces $P\cos\alpha$,

P cos β, parallèles à AX, AY. Le moment de cette force Q par rapport à O, que l'on appelle aussi le *moment de la force* P *par rapport à* AZ, sera donc la somme algébrique des moments des deux autres, ou

$$P(x \cos \beta - y \cos \alpha).$$

Ce qui est le couple relatif à la force P estimé suivant l'axe des z. D'où l'on voit que les trois dernières équations d'équilibre expriment que *les sommes des moments de toutes les forces par rapport à trois axes rectangulaires, sont séparément égales à zéro.*

On peut remarquer que la distance du point O à la force Q, n'est autre chose que la distance de O au plan mené par la force P parallèlement à l'axe des z; c'est donc la plus courte distance de la force P à cet axe. De sorte que le moment d'une force par rapport à un axe est le produit de la plus courte distance de ces deux droites par la composante de cette force perpendiculairement à l'axe.

Cas où le corps s'appuie sur un plan fixe.

58. On prendra pour plan des x et y celui sur lequel le corps s'appuie par un nombre quelconque de points. Ce plan ne peut produire que des forces normales et de même sens, appliquées aux points de contact avec le corps, et ces forces ont nécessairement une résultante normale égale à leur somme. Il est donc nécessaire que toutes les forces appliquées au corps aient une résultante parallèle à l'axe des z : d'où résultent les équations

$$\Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = 0.$$

De plus, en composant successivement les forces développées par le plan fixe, on reconnaît facilement que leur résultante ne peut avoir son point d'application en dehors

du polygone convexe qui renferme tous les points de contact : il est donc nécessaire que la résultante de la force $\Sigma P \cos \gamma$ et des deux couples situés dans les plans ZX, ZY, ait son point d'application dans l'intérieur de ce même polygone et tende à appuyer le corps sur le plan. Réciproquement, si cette condition est remplie, l'équilibre aura lieu, parce que cette résultante pourra toujours être décomposée en forces normales au plan et appliquées aux divers points de contact.

Ces forces devront satisfaire aux trois équations données par la théorie des forces parallèles; elles seront donc indéterminées, s'il y a plus de trois points; elles le seront même dès qu'il y en aura plus de deux en ligne droite. S'ils y sont tous, le point d'application de la résultante devra se trouver sur cette droite; enfin, s'il n'y avait qu'un point de contact, il serait nécessaire qu'il fût situé sur la direction de la résultante.

Conditions pour qu'un système de forces ait une résultante. — Détermination de cette résultante.

59. Pour qu'un système de forces, non en équilibre, soit réductible à une force unique, il est nécessaire et suffisant qu'en introduisant une force convenable, on établisse l'équilibre; car le système proposé pourra être remplacé par une force égale et opposée à celle-ci. Or, nous avons vu que tout système de forces appliquées à un corps rigide, pouvait être réduit à une force et un couple; il est donc nécessaire que cette force et celle que l'on introduira détruisent le couple résultant. Or, ces deux forces peuvent toujours se réduire à un couple et une force, et il faut que cette dernière soit zéro; car, sans cela, il faudrait qu'elle fût en équilibre avec le couple résultant des deux autres. Les deux forces doivent donc former un couple qui détruise le couple

résultant du système donné. Il faut donc que la force résultante soit parallèle au plan du couple résultant, et ne soit pas nulle. Et réciproquement, s'il en est ainsi, il existera une force qui formera, avec la force résultante, un couple qui détruira le couple résultant; et, par conséquent, le système proposé sera réductible à une seule force.

60. Cherchons maintenant à déterminer la résultante totale du système; et prenons les axes de coordonnées de la manière la plus générale.

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son point d'application, et X_1, Y_1, Z_1 ses composantes; il y aura équilibre en introduisant dans le système une force appliquée au même point, ayant pour composantes

$$-X_1, \quad -Y_1, \quad -Z_1;$$

d'où l'on tire, d'après les équations générales de l'équilibre, en représentant par X, Y, Z les sommes des composantes suivant les trois axes,

$$X_1 = X, \quad Y_1 = Y, \quad Z_1 = Z;$$

$$Z_1 y_1 - Y_1 z_1 = L, \quad X_1 z_1 - Z_1 x_1 = M, \quad Y_1 x_1 - X_1 y_1 = N;$$

et réciproquement, si l'on satisfait à ces équations, il y aura une résultante appliquée au point (x_1, y_1, z_1), et ayant pour composantes X_1, Y_1, Z_1. Les trois premières font connaître les composantes de la force cherchée, et, par suite, la direction de cette force et son intensité. Les trois autres déterminent les coordonnées de son point d'application, et deviennent, en vertu des premières,

$$Zy_1 - Yz_1 = L, \quad Xz_1 - Zx_1 = M, \quad Yx_1 - Xy_1 = N.$$

Or, si on les ajoute après avoir multiplié la première par X, la seconde par Y, et la troisième par Z, on trouve

$$LX + MY + NZ = o,$$

équation nécessaire pour qu'il n'y ait pas incompatibilité,

et par suite pour qu'il y ait une résultante. Les trois équations se réduisent donc à deux quelconques d'entre elles, et comme elles sont du premier degré par rapport à x_1, y_1, z_1, elles déterminent une ligne droite. Le système peut donc être remplacé par une force dont les composantes sont X, Y, Z, et appliquée en un point quelconque de cette droite qui, par conséquent, ne peut être autre chose que la direction même de la résultante. C'est ce qu'on reconnaît d'ailleurs d'après ses équations, qui montrent qu'elle est parallèle à la résultante des forces X, Y, Z.

61. Lorsque l'équation précédente n'est pas satisfaite, le système n'a pas de résultante, mais il peut être réduit à deux forces non situées dans un même plan. En effet, il peut être remplacé par un couple et une force non parallèle au plan du couple; et l'on peut toujours faire en sorte que cette force rencontre l'une de celles qui forment le couple : il suffit de transporter convenablement ce dernier. Or, si l'on compose ces deux forces appliquées au même point, et dont l'une n'est pas comprise dans le plan du couple, elles donneront une résultante qui ne sera pas située dans ce plan. Le système sera donc réduit à deux forces non situées dans un même plan.

Une construction inverse ferait voir réciproquement que deux forces non dans un même plan peuvent être remplacées par un couple et une force non parallèle à son plan, et que par conséquent elles n'ont pas de résultante. On peut encore démontrer très-simplement cette dernière proposition, sans s'appuyer sur la théorie des couples. En effet, si deux forces, non dans un même plan, avaient une résultante, il y aurait équilibre en introduisant une force égale et contraire. Cet équilibre ne serait pas dérangé en liant les points du système à une droite fixe, et choisie de manière qu'elle rencontrât la direction de la force introduite et de l'une des proposées, sans rencontrer l'autre; ce qui est pos-

sible d'une infinité de manières. Mais alors deux des forces étant détruites, il faudrait que la troisième le fût; ce qui n'est pas, puisqu'elle ne rencontre pas l'axe. Donc les deux forces n'avaient pas de résultante.

Résultante de forces dans un même plan.

62. Si toutes les forces sont dans un même plan, on prendra les axes des x et des y dans ce plan; les composantes et les coordonnées parallèles à l'axe des z seront nulles; on aura donc $Z = 0$, $L = 0$, $M = 0$, et la résultante sera déterminée par les équations

$$X_1 = X, \quad Y_1 = Y, \quad Yx_1 - Xy_1 = N.$$

Les deux premières déterminent la grandeur et la direction de cette force; la troisième est celle d'une droite dont tout point peut être considéré comme le point d'application de la résultante: c'est donc l'équation même de la résultante. Elle deviendrait impossible si l'on avait $X = 0$, $Y = 0$, sans avoir $N = 0$; ce qui s'accorde avec la remarque générale faite précédemment: les forces se réduisent alors à un couple. Toutes les fois que l'on n'a pas $X = 0$, $Y = 0$, la résultante existe sans autre condition, et l'on peut remarquer que la condition générale exprimée par l'équation

$$LX + MY + NZ = 0$$

est satisfaite, puisque l'on a

$$L = 0, \quad M = 0, \quad Z = 0.$$

63. La troisième équation, qui détermine la résultante, peut être mise sous une autre forme, en introduisant, comme précédemment, les moments des forces par rapport à l'origine.

Soient R l'intensité de la résultante, et Rr son moment

positif ou négatif; la force opposée à R aura pour moment $-Rr$, et l'équilibre sera exprimé par les trois équations

$$X_1 = X, \quad Y_1 = Y, \quad -Rr + \Sigma Pp = 0;$$

d'où

$$Rr = \Sigma Pp.$$

La troisième apprend que le moment de la résultante par rapport à un point quelconque du plan est égal à la somme algébrique de ceux des composantes; mais elle deviendrait impossible si R était nulle sans que l'on eût $\Sigma Pp = 0$: il n'y aurait donc pas alors de résultante. Et, en effet, on voit que, dans ce cas, les forces données se réduisent à un couple; dans tout autre cas, on obtient une valeur de r qui satisfait à la troisième équation. Il existe donc une résultante dont on connaît la valeur, la direction, la distance à l'origine; de plus, le sens dans lequel elle tend à faire tourner autour de ce point est connu par le signe du moment Rr; la résultante est donc entièrement déterminée.

64. Il est bon de remarquer que l'on a, pour une force quelconque, $xY - yX = \frac{Pp}{\sin\theta}$, θ désignant l'angle des axes. En effet, une force P peut être remplacée par une force égale et parallèle appliquée à l'origine, plus le couple Pp; et elle peut aussi être remplacée par les deux forces X, Y appliquées à l'origine, plus deux couples dont les moments sont $xY\sin\theta$ et $-yX\sin\theta$. Les deux forces X et Y se composent en la force P, appliquée à l'origine : il est donc nécessaire que les deux couples se réduisent au premier; d'où l'on conclut

$$xY\sin\theta - yX\sin\theta = Pp,$$

ou

$$xY - yX = \frac{Pp}{\sin\theta},$$

et l'on voit clairement comment les équations

$$\Sigma(xY - yX) = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma Pp = 0$$

peuvent se remplacer l'une l'autre.

Si les axes sont rectangulaires, l'équation précédente devient

$$xY - yX = P(x \cos \beta - y \cos \alpha) = Pp$$

ou

$$x \cos \beta - y \cos \alpha = p.$$

Remarques sur la réduction d'un système de forces.

65. Nous avons démontré qu'un système de forces appliquées à des points liés invariablement entre eux, mais libres dans l'espace, pouvait toujours être réduit à une force unique et un couple; cette force est la résultante de toutes celles du système, transportées parallèlement à elles-mêmes en un point choisi arbitrairement, et que nous nommerons l'*origine*. Elle est donc toujours la même en grandeur et en direction; son point d'application peut seul changer : il est entièrement arbitraire. Quant au couple résultant, il dépend du point où l'on a transporté toutes les forces. Si on le décompose en deux autres, dont l'un ait son axe dans une direction donnée et l'autre dans une direction quelconque perpendiculaire, le premier est égal, comme nous l'avons démontré n° 57, à la somme des moments de toutes les forces par rapport à la droite menée par l'origine suivant la direction donnée. Nous allons faire quelques remarques importantes sur les moments relatifs aux droites qui passent par un même point, et sur les changements qu'ils éprouvent quand ce point se déplace. Nous les avons reportés à la fin de la Statique, afin de ne pas entraver la marche du cours. Ce que nous allons dire est

extrait de l'ancien Mémoire de M. Poinsot, sur la composition des moments.

66. *Moments par rapport aux différents axes qui passent par un même point.* — La somme des moments de forces quelconques par rapport à un axe s'obtient, comme nous l'avons vu, en projetant sur cet axe les trois sommes relatives aux axes coordonnés rectangulaires qui passent en ce point, ou plus simplement, en projetant le moment résultant ou celui du couple résultant sur ce même axe. Ainsi, quand on aura déterminé en direction et en grandeur l'axe du couple résultant relatif à une certaine origine, il suffira de le projeter sur une droite quelconque passant par ce point, pour obtenir la somme des moments des forces par rapport à cette droite. D'où résultent les propositions suivantes :

Si l'on considère les sommes des moments d'un système quelconque de forces par rapport à toutes les droites qui passent par un même point, la somme maximum sera celle qui correspondra à l'axe du couple résultant relatif à ce point pris pour origine.

La somme des moments sera la même pour toutes les droites qui feront le même angle avec l'axe du couple résultant. Elle sera nulle pour toutes les droites perpendiculaires à cet axe.

67. *Comparaison des moments maxima relatifs à différents points.* — Soient A (*fig.* 20) une origine quelconque, AR la résultante des forces transportées en ce point, et AM la direction et la grandeur de l'axe du couple résultant correspondant. Pour obtenir le couple résultant relatif à une autre origine quelconque, il suffirait de composer avec le premier un nouveau couple formé de la force R et d'une force R′ parallèle et contraire menée par A′; d'où l'on conclut d'abord que si A′ est sur la droite AR, ce dernier couple est nul, et le couple résultant

est le même qu'au point A. On a donc cette première proposition :

Le couple résultant est le même en grandeur et en direction pour tous les points d'une même droite quelconque parallèle à la résultante.

En d'autres termes : *Pour tous les points d'une même droite parallèle à la résultante, les axes de moment maximum sont parallèles, et ce moment a la même valeur.*

Supposons maintenant que le point A′ ne soit pas sur la direction AR de la résultante relative au point A, le couple qu'il faudra composer avec AM aura son axe perpendiculaire au plan RAA′, et, par conséquent, à la droite AR. Si l'on fait mouvoir le point A′, cet axe pourra prendre toutes les directions dans le plan perpendiculaire à AR ; aucune ne sera celle de AM si l'angle θ n'est pas droit, c'est-à-dire si le système des forces n'a pas de résultante unique : ainsi, en exceptant ce cas particulier, la direction de l'axe du couple résultant sera différente de AM si A′ n'est pas sur AR. Les directions diverses de l'axe du couple RR′ feront avec AM, les unes un angle aigu, les autres un angle obtus, si AM et AR n'ont pas la même direction. Les axes qui feront un angle aigu avec AM donneront un couple résultant plus grand que AM ; ceux qui feront un angle obtus pourront donner un couple résultant plus grand ou plus petit que AM, suivant la grandeur du moment du couple $\overline{R, R'}$ qui peut varier de zéro à l'infini, en changeant la distance de A′ à AR. D'où l'on voit que le moment maximum relatif au point A, comparé à ceux qui correspondent aux divers axes passant par A′, sera plus petit que les uns et plus grand que les autres, si les directions AM, AR sont différentes ; mais si elles se confondent, les deux couples à composer auront toujours leurs axes perpendiculaires entre eux, et, par con-

séquent, donneront un couple résultant plus grand que AM. D'où résulte cette proposition :

Le point de l'espace pour lequel le moment du couple résultant est le plus petit, est celui pour lequel la direction de l'axe de ce couple se confond avec celle de la résultante.

Et, d'après ce qui vient d'être établi tout à l'heure, si l'on trouve un point jouissant de cette propriété, tous les points de la parallèle à la résultante menée par ce point en jouiront de même; et tous les axes des couples résultants, ou, en d'autres termes, les axes pour lesquels la somme des moments des forces est maximum, considérés pour tous les points de cette droite, se confondent, puisqu'ils sont parallèles à cette droite même; de sorte qu'il n'existe dans l'espace qu'un seul axe tel, que la somme des moments des forces par rapport à lui soit plus grande que par rapport à toute autre droite menée par un de ses points, et en même temps soit moindre que la somme maximum, relative à tout point situé en dehors de lui. C'est à cet axe que M. Poinsot donne le nom d'*axe central des moments*.

68. *Détermination de l'axe central.* — Pour obtenir l'axe central, il faut choisir le point A', de telle sorte que la perpendiculaire au plan RAA', ou l'axe du couple RR', soit dans le plan MAR. Il suffira, pour cela, de prendre A' dans le plan mené par AR perpendiculairement au plan MAR, et du côté de AR, pour lequel le sens du couple donnera à l'axe la direction AN et non la direction opposée, parce qu'il faut que AR soit dans l'angle des directions des deux axes composants. Cela posé, il suffira de prendre le point A' à une distance de AR telle, que le moment du couple soit égal au côté MB du parallélogramme MBAN. Si donc on désigne par G le moment du premier couple résultant AM; par K celui du nouveau couple résultant; par p

la distance de A′ à AR; par θ l'angle MAR, le moment du couple RR′ sera Rp, et l'on aura

$$\cos\theta = \frac{LX + MY + NZ}{GR},$$

$$K = G\cos\theta = \frac{LX + MY + NZ}{R}, \quad Rp = G\sin\theta.$$

Le point A′ est ainsi déterminé autant qu'il doit l'être; ce sera l'un quelconque de ceux de la parallèle à AR menée à la distance $\frac{G\sin\theta}{R}$ de AR, dans le plan perpendiculaire au plan MAR conduit suivant AR, et du côté de AR que nous avons indiqué. Si l'on veut prendre en particulier le point situé sur la perpendiculaire au plan MAR mené par A, ses coordonnées a, b, c se détermineront par les équations suivantes, en prenant le point A pour origine :

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{G^2\sin^2\theta}{R^2},$$

$$aX + bY + cZ = 0, \quad aL + bM + cN = 0.$$

Les deux dernières expriment que la droite AA′ est perpendiculaire sur la résultante, dont les composantes sont X, Y, Z, et sur l'axe du couple résultant, dont les axes composants sont L, M, N. La première exprime que la longueur AA′ est égale à p. Ces trois équations donnent deux points dont les coordonnées sont égales et de signes contraires; mais un seul devra être choisi : c'est celui qui donne au couple RR′ le sens que nous avons indiqué précédemment.

Le point A′ étant ainsi déterminé, la parallèle à la résultante menée par ce point sera l'*axe central*, et, nous le répétons, la direction de cet axe est, pour un quelconque de ses points, celle de l'axe du moment maximum; et ce moment est moindre que le maximum correspondant à tout autre point de l'espace.

69. *Disposition de tous les axes autour de l'axe central.* — Concevons un plan quelconque perpendiculaire à l'axe central; ce que nous dirons de tous les points de ce plan s'appliquerait identiquement à ceux de tout autre plan parallèle, et, par conséquent, à tous ceux de l'espace.

Soient AR (*fig.* 21) cet axe, et A′ un point quelconque du plan perpendiculaire mené par A. En prenant ce nouveau point pour origine, il faudra composer le couple résultant dont l'axe est AM en direction et en grandeur, avec le couple situé dans le plan RAA′, ayant pour moment Rp, p désignant la longueur AA′. L'axe du couple résultant sera, en direction et en grandeur, la diagonale AB du rectangle construit sur AM et la ligne AN égale à Rp et perpendiculaire au plan RAA′. Désignons par φ l'angle de l'axe résultant avec l'axe central, et par H le moment résultant; on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{Rp}{G}, \quad K^2 = R^2p^2 + G^2.$$

Les valeurs de K et φ ne dépendant que de p, il s'ensuit que pour tous les points d'une même circonférence décrite du centre A dans le plan perpendiculaire à AR, les moments maxima sont égaux et leurs axes forment un hyperboloïde de révolution autour de l'axe central, dont la circonférence que l'on considère forme le cercle de gorge, et le demi-axe imaginaire de l'hyperbole génératrice a pour valeur $\frac{G}{R}$. Si l'on prend p comme abscisse, et le moment correspondant K comme ordonnée, on construira, d'après l'équation ci-dessus, une hyperbole dont l'axe réel sera dirigé suivant AR et aura pour valeur 2G. Son demi-axe imaginaire sera $\frac{G}{R}$ comme pour l'autre hyperbole.

Ainsi, l'axe central jouit de la propriété, que pour tous les points d'une surface cylindrique quelconque dont il est

l'axe, le moment maximum a la même valeur; l'axe de ce moment a la même direction pour tous les points d'une même arête de ce cylindre; il change de direction en passant d'une arête à une autre, en conservant la même inclinaison sur l'axe et la même distance. La valeur du moment maximum augmente indéfiniment avec la distance de l'origine à l'axe central; et l'angle de son axe avec l'axe central a pour limite l'angle droit.

70. *Cas où le système des forces a une résultante.* — Si l'on prend pour origine un point quelconque de cette résultante, le couple correspondant sera nul, et, par conséquent, cette droite sera l'axe central lui-même. Les formules précédentes donnent, en effet, $p = 0$ quand on suppose $G = 0$. Si maintenant on prend une origine quelconque en dehors de la résultante unique, on aura un couple résultant dont le plan sera celui qui passera par l'axe central et la nouvelle origine. Ainsi, dans ce cas particulier, *tous les points d'un même plan quelconque passant par la résultante unique donnent des couples résultants, dont les axes sont parallèles.*

Mais les moments de ces couples ne sont pas égaux; ils sont proportionnels à la distance de l'origine qui leur correspond à la résultante générale. Ils n'ont donc la même valeur que pour les points situés sur deux parallèles équidistantes de cette résultante, et, de plus, le sens de ces couples n'est le même que pour les points d'une même parallèle.

Cas où la résultante est nulle. — Si la résultante est nulle, le changement d'origine n'introduit aucun nouveau couple, et, par conséquent, le couple résultant a toujours le même moment, et son plan la même direction, quelle que soit l'origine où l'on transporte les forces.

CHAPITRE VII.

ÉQUILIBRE DE SYSTÈMES DE FIGURE VARIABLE COMPOSÉS DE PLUSIEURS SYSTÈMES RIGIDES.

71. Lorsque tous les points d'un système ne sont pas invariablement liés les uns aux autres, on ne peut plus faire les compositions et décompositions qui réduisent toutes les forces à une seule force et un seul couple. Le principe général d'après lequel on ramène ce cas au précédent, consiste en ce qu'il est évidemment nécessaire et suffisant que chacun des systèmes rigides partiels soit en équilibre, au moyen des forces qui agissent sur lui, et qui se composent tant des forces données que de celles qui naissent de sa liaison avec les autres systèmes. Pour fixer les idées, supposons que ces liaisons consistent en des fils flexibles ou des tiges rigides, dont les extrémités soient fixées à deux points appartenant à des systèmes différents; ou bien encore que des surfaces appartenant à deux systèmes soient en contact l'une avec l'autre et se pressent mutuellement.

Lorsque l'équilibre est établi, chaque fil étant lui-même en équilibre doit être tiré dans le sens de sa longueur, par deux forces égales et contraires, dont l'une agira sur le premier des systèmes, l'autre sur le second; chacun des deux étant tiré par l'autre.

Si les fils devenaient entièrement rigides, et ne pouvaient ni augmenter ni diminuer de longueur, l'équilibre d'une quelconque de ces verges ou tiges rigides exigerait que les deux forces appliquées à ses extrémités fussent égales, contraires et dirigées suivant cette verge; mais la force appliquée à chaque corps ne sera pas nécessairement une traction exercée par l'autre, comme dans le cas d'un fil flexible; elle pourra être dans le sens opposé.

S'il s'agit de deux surfaces en contact, les forces détruites par une surface étant toujours supposées normales à cette surface, il en résulte que chacun des deux systèmes est sollicité par une force dirigée suivant la normale commune; ces deux forces sont de sens contraires, et chaque système, au lieu d'être tiré du côté de l'autre, comme dans le cas d'un fil, est au contraire poussé par lui. Quant à l'intensité des deux forces normales, elle est évidemment la même; car la résistance d'une surface ne peut détruire une force qu'en en développant une autre exactement égale et opposée.

Ainsi, dans tous les cas où la communication des systèmes partiels s'effectue par des fils flexibles, des tiges rigides, ou des contacts de surfaces rigides, il se développe d'un système à un autre des forces inconnues, égales deux à deux et de sens contraires.

Ces différents modes de communication sont à peu près les seuls qu'il soit utile de considérer. Dans les autres cas qui pourront se présenter, on reconnaîtra toujours que les forces développées par les liaisons seront des *actions* et *réactions égales et contraires*; parce qu'une force ne peut être détruite que par une force égale et opposée.

Lorsque les systèmes rigides sont ce que l'on appelle des *machines simples*, comme le levier, le treuil, etc., leur ensemble forme ce que l'on désigne sous le nom de *machine composée*.

72. Cela posé, on pourra, d'après les théories précédentes, former les équations d'équilibre de chaque système rigide, dont le nombre pourra varier de un à six pour chacun d'eux. En éliminant les forces provenant des liaisons, on aura les équations auxquelles devront satisfaire les forces données pour que le système composé soit en équilibre; et les équations qui auront servi à l'élimination feront connaître les valeurs de toutes les forces de liaison et leurs

directions, quand elles ne seront pas données immédiatement.

Dans le cas particulier où l'équilibre de chaque système n'exigerait qu'une équation, et où la communication de l'un à l'autre ne donnerait lieu qu'à deux forces égales et contraires, il est facile de voir qu'il n'y a qu'une seule équation nécessaire pour l'équilibre des forces données.

En effet, soit m le nombre des systèmes; on aura m équations d'équilibre, et $m-1$ forces inconnues, développées par la communication du premier avec le second, du second avec le troisième, et ainsi de suite jusqu'au $m^{ième}$.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$ ces $m-1$ forces. La première équation renfermera X_1, la seconde X_1 et X_2, la troisième X_2 et X_3, enfin la dernière ne renfermera que X_{m-1} sans compter toutes les forces données.

Tirant X_1 de la première et le reportant dans la seconde; puis X_2 de celle-ci et le reportant dans la troisième; et continuant ainsi, on arrivera à une dernière équation ne renfermant plus que les forces données. Ce sera la condition unique de leur équilibre; et toutes les équations précédentes feront connaître $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$.

Exemples divers.

73. *Premier exemple.* — Considérons en premier lieu deux leviers, c'est-à-dire deux systèmes rigides liés respectivement à deux points fixes O, O' (*fig.* 22) autour desquels ils peuvent tourner librement, et sollicités par des forces quelconques. Un fil flexible a ses extrémités fixées en deux points M, M' de ces corps. On demande les conditions d'équilibre de ce système, qui est dans une position donnée où le fil a tous ses points en ligne droite et peut avoir une tension inconnue quelconque.

En désignant cette tension inconnue par X, le levier MO sera en équilibre sous l'action des forces qui y sont directement appliquées et de la force X qui agit de M vers M'; il résulte de là les trois équations connues, qui renferment chacune X au premier degré. De même le corps M'O' sera en équilibre sous l'action des forces qui y sont appliquées, et de la force X qui agit de M' vers M. On trouve ainsi trois nouvelles équations qui renferment encore X au premier degré.

Tirant la valeur de X de l'une de ces six équations, on connaîtra la tension du fil; et la reportant dans les cinq autres, on aura les équations de condition auxquelles doivent satisfaire les forces données pour que le système soit en équilibre.

74. *Deuxième exemple.* — Considérons maintenant un levier et un treuil; le premier pouvant tourner librement autour d'un point O, et l'autre autour d'un axe AZ (*fig.* 23). Ils sont sollicités par des forces quelconques et se touchent en un point M. On demande les conditions pour qu'il y ait équilibre, et la valeur de la pression mutuelle en M.

Désignant par X l'intensité inconnue de cette pression, le corps MO sera en équilibre sous l'action des forces qui y sont directement appliquées et de la force X dirigée suivant MN. Il résultera de là trois équations qui renfermeront X et les forces proposées.

Le second corps sera en équilibre sous l'action des forces qui y sont appliquées et de X qui sera dirigée de M vers N'. L'équilibre de ce corps, qui ne peut que tourner autour d'un axe fixe, conduira à une équation unique renfermant X. On aura ainsi quatre équations, dont l'une fera connaître X, et les trois autres donneront, par la substitution de cette valeur, trois équations de condition entre les quantités données.

75. *Troisième exemple.* — Prenons maintenant pour

exemple un polygone formé par des droites rigides dont les angles peuvent varier sans opposer de résistance, et dont les extrémités sont assujetties à rester sur des courbes données.

Soient ABCDE (*fig.* 24) ce polygone, P, Q, R, S, T les résultantes des forces appliquées respectivement aux points A, B, C, D, E.

Chacun de ces points doit être en équilibre au moyen des forces qui agissent immédiatement sur lui et de la résistance de la courbe; et, par conséquent, la résultante de ces forces, abstraction faite de cette résistance, doit être normale à la courbe.

De même, chaque côté doit être en équilibre au moyen des forces de tout genre qui y sont appliquées; ce qui exige que les deux résultantes de toutes celles qui agissent séparément en A et en B sur cette tige soient égales et directement opposées, et, par suite, que cette direction soit celle du côté lui-même.

Il suit de là que la résistance de ce côté consiste en deux forces appliquées en A et B, et détruisant chacune des deux précédentes. De sorte qu'une tige rigide peut être considérée comme produisant deux forces égales et contraires, agissant dans la direction de cette tige.

Cela posé, désignons par X, Y, Z, U les forces que produisent ainsi les divers côtés du polygone. Soient a, b, c, d, e les angles que font les directions des forces P, Q, R, S, T avec les tangentes aux courbes données, considérées dans des sens déterminés; α, α' les angles que les directions des deux forces X font avec les tangentes en A et B; β, β' les angles des forces Y avec les tangentes en B et C; et ainsi de suite.

L'équilibre du point A donnera la condition

$$P\cos a + X\cos\alpha = 0.$$

L'équilibre du point B donnera

$$X \cos \alpha' + Q \cos b + Y \cos \beta = 0,$$

et l'on trouvera de même pour les autres points,

$$Y \cos \beta' + R \cos c + Z \cos \gamma = 0,$$
$$Z \cos \gamma' + S \cos d + U \cos \delta = 0,$$
$$U \cos \delta' + T \cos e = 0.$$

Eliminant X, Y, Z, U entre toutes ces équations, il en reste une seule entre les forces données, qui sera la condition d'équilibre du système. Les autres feront connaître les intensités des forces X, Y, Z, U.

Quant au sens dans lequel elles agissent, et qui n'est pas connu d'avance, il sera déterminé par les signes que devront avoir les cosinus des angles α, α', β, β', etc. Ainsi, la première équation faisant connaître le signe de cos α, détermine le sens de la force X provenant de la tige AB et agissant en A; d'où résulte le sens de la seconde force X appliquée en B, et, par suite, le signe de cos α'. La seconde équation fera connaître ensuite le signe de cos β, d'où résultera le sens de la force Y agissant en B; et ainsi de suite jusqu'au dernier côté.

76. Si l'une des tiges était normale à l'une des courbes, il en résulterait des conséquences particulières qu'il est bon de remarquer. Supposons, par exemple, que BC soit donnée normale à la courbe en B; on aura

$$\cos \beta = 0,$$

et les deux premières équations donneront, par l'élimination de X, une équation de condition qui ne sera autre que la condition d'équilibre des deux forces P et Q qui seraient appliquées à la tige unique AB, dont les extrémités seraient liées aux deux premières courbes. En effet, cela devait être, puisque la force Y étant détruite par la résistance de

la courbe en B, doit être considérée comme n'existant pas pour les points situés du côté de B que l'on considère.

Les trois autres équations donneront, par l'élimination de Z et U, une équation qui sera celle de l'équilibre du système C, D, E considéré isolément, et dans lequel il y aurait une force indéterminée Y agissant en C suivant la ligne BC, dans l'un quelconque des deux sens. En effet, cette tige BC peut être sollicitée par une force quelconque en *c* dans le sens de sa longueur, sans qu'il en puisse résulter aucun déplacement, vu qu'elle sera détruite par la résistance de la courbe à laquelle elle sera normale en B.

77. *Quatrième exemple.* — Considérons maintenant un système de points liés entre eux par des fils flexibles et inextensibles, et formant ce que l'on appelle un polygone funiculaire. Dans ce cas, les systèmes rigides partiels se réduisent à des points. Soient A, B, C, D (*fig.* 25) ces points; U, P, Q, R, S, V les forces qui y sont appliquées, et dont les deux extrêmes U, V agissent par l'intermédiaire des fils ou cordons AU, DV.

Pour que ce système soit en équilibre, il faut que chacun des points A, B, C, D soit en équilibre au moyen des forces qui y sont appliquées. Ainsi, par exemple, le point B est sollicité par trois forces qui sont les efforts exercés par les cordons BA, BC, et la force Q; ces trois forces devront donc être dans un même plan, et chacune d'elles proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres. Mais l'équilibre de chacun des cordons exige encore qu'il soit tiré par des forces égales et contraires, et dont l'intensité se nomme la *tension* du cordon. Au moyen de ces conditions, on pourra déterminer les tensions de tous les cordons, et les rapports des forces entre elles lorsque l'on connaîtra la figure du polygone en équilibre.

78. On peut déterminer très-simplement la tension T d'un cordon quelconque CD, en observant qu'il y a équi-

libre entre cette force T et la partie du système qui est située d'un côté quelconque de CD. Considérons par exemple les forces U, P, Q, R et T; elles ne cesseront pas d'être en équilibre si l'on rend inflexible le polygone ABC; et, par conséquent, la force T est égale et opposée à la résultante des forces U, P, Q, R. Et comme on peut transporter des forces en un point quelconque de leur résultante sans changer leur effet, on obtient le théorème suivant :

La tension d'un cordon quelconque est la résultante de toutes les forces situées d'un même côté de ce cordon, et transportées parallèlement à elles-mêmes en un quelconque de ses points.

79. Si l'une des forces était appliquée à un point mobile sur le fil, par exemple à un anneau qui pût glisser librement sur ce fil, l'équilibre exigerait une condition particulière.

Soit P la force appliquée à l'anneau M, et supposons l'équilibre établi; il ne sera pas troublé si l'on rend fixes les deux points A et B. Mais alors le point M (*fig.* 26) ne pourrait se mouvoir que sur la surface d'un ellipsoïde de révolution dont A et B seraient les foyers; on peut donc faire abstraction du fil et supposer que le point est assujetti à rester sur cette surface fixe. Il est donc nécessaire, pour son équilibre, que la force P qui le sollicite soit normale à l'ellipsoïde, et, par conséquent, partage l'angle AMB en deux parties égales. Ainsi, quand un des points d'application des forces sera mobile sur le fil, la direction de la force devra diviser en deux parties égales l'angle des deux cordons correspondants, et leur tension sera la même.

Il en serait de même si l'anneau étant fixe, le fil pouvait glisser sur lui sans résistance; car l'équilibre aurait évidemment lieu, en supposant égales les tensions suivant MA, MB; et, par conséquent, il y aurait mouvement si l'on augmentait l'une des deux.

80. Lorsque le polygone est en équilibre, il y sera encore si l'on rend sa figure invariable; et, par conséquent, toutes les forces extérieures qui y sont appliquées doivent satisfaire aux conditions d'équilibre d'un système rigide. Si donc on les transporte parallèlement à elles-mêmes en un même point, elles doivent donner une résultante nulle, ce qui donne trois équations.

Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, on pourra donner au polygone une figure telle, que les forces données de grandeur et de direction s'y fassent équilibre.

En effet, plaçons arbitrairement le point A (*fig.* 25), et donnons au cordon AB la direction opposée à la résultante de U et P, et une tension égale à cette résultante. Donnons ensuite au cordon BC une direction contraire à la résultante de la force Q et de la tension du cordon AB, et une tension égale à cette résultante; et continuons ainsi jusqu'au dernier sommet D : la direction et l'intensité qu'il faudra donner à la force qui tiendra ce point en équilibre, seront telles que le polygone entier y sera lui-même; elle sera donc égale et opposée à la résultante des forces U, P, Q, R, S transportées en D, et, par conséquent, sera la force donnée V. On peut donc toujours donner au polygone une forme telle, que des forces données de grandeur et de direction s'y fassent équilibre, pourvu que, transportées en un même point, elles s'y détruisent. Cette conséquence étant indépendante du nombre des côtés du polygone, aura lieu encore à la limite lorsque les côtés tendant vers zéro, il s'approchera indéfiniment de se confondre avec une courbe.

81. Si les extrémités du cordon sont fixes, les forces U et V ne sont plus données, et l'on peut encore se proposer de déterminer la forme du polygone en équilibre et les valeurs de ces deux forces.

Pour cela, on partira de la première extrémité fixe U, et l'on supposera connues les trois composantes de la ten-

sion U : on déterminera, en conséquence, la position du point A, ainsi que les positions des autres points et les tensions de tous les cordons. Les coordonnées du point extrême du dernier cordon seront donc exprimées en fonction de celles du premier point que l'on peut supposer nulles, et des trois composantes de la force U. En égalant ces expressions aux valeurs données des coordonnées du second point fixe, on aura trois équations qui détermineront ces composantes, ainsi que toutes les tensions, et les positions de tous les sommets.

82. Si les directions des deux cordons extrêmes se rencontrent, les forces U, V ont une résultante : d'où il suit que les forces P, Q, R, S en ont une égale et opposée; et, par conséquent, lorsque le polygone est en équilibre et que les deux extrémités sont fixes, on connaîtra l'effort exercé sur chacune d'elles en prolongeant les cordons qui y aboutissent, puis transportant à leur point de concours les forces données et les décomposant en deux forces dirigées suivant ces mêmes cordons. Chacune de ces composantes mesurera la tension du cordon correspondant, et l'effort qui sera exercé sur le point fixe où il est attaché.

83. Lorsque toutes les forces P, Q, R, S (*fig.* 27) sont parallèles, il est facile de voir que tout le système est compris dans un même plan. Supposons, de plus, que l'un des cordons, BC par exemple, soit perpendiculaire à la direction des forces; remplaçons-le par une force égale à sa tension, et ne considérons que les forces situées d'un même côté de ce cordon. La tension d'un cordon quelconque DE est la résultante de toutes les forces situées d'un même côté et transportées au point D; donc la composante perpendiculaire aux forces sera constante pour tous les cordons, et égale à la tension de BC; et la composante parallèle aux forces sera la somme de toutes ces forces depuis B jusqu'en D.

84. Lorsqu'une force sollicite un point qui est retenu par plusieurs cordons, on aura la tension de chacun d'eux en décomposant cette force en d'autres qui soient dirigées suivant tous les cordons. Il y aura indétermination si leur nombre est plus grand que trois; et cela tient à l'hypothèse que l'on fait de l'inextensibilité des cordons. C'est ainsi que nous avons déjà vu que les pressions exercées par un corps qui repose sur un plan par plus de trois points ne sont pas déterminées individuellement. Dans la réalité, les pressions en chaque point du plan, et les tensions de chaque cordon sont déterminées, parce que chaque cordon s'allonge, et chaque point de contact d'un corps sur le plan cède plus ou moins. Ces circonstances, jointes aux propriétés physiques de la matière qui les forme, font connaître chaque force en particulier: mais ces recherches sont étrangères à notre cours, et nous ne nous en occuperons pas.

Equilibre d'un fil flexible et inextensible dont tous les points sont soumis à l'action de forces quelconques.

85. Soient X, Y, Z les composantes de la force qui sollicite un point quelconque du fil, et qui est rapportée à l'unité de longueur, de sorte qu'un arc infiniment petit ds soit sollicité par une force dont les composantes soient Xds, Yds, Zds. Les extrémités du fil peuvent être fixes, ou sollicitées par des forces données de direction et d'intensité; il s'agit de trouver les conditions de l'équilibre du système, qui n'est autre chose qu'un polygone funiculaire d'un nombre infini de côtés.

Or, dans cet état, un élément infiniment petit quelconque du fil doit être en équilibre au moyen des forces qui y sont appliquées; et réciproquement, si cela a lieu, le fil entier sera en équilibre.

Soit donc ds un élément quelconque; il ne cessera pas d'être en équilibre si l'on rend sa figure invariable. Or, les forces qui le sollicitent sont les tensions exercées à ses extrémités, qui sont dirigées respectivement suivant les tangentes en ces points et en sens inverse, et de plus les forces $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$.

La tension T, variant d'une manière continue en même temps que l'arc s de la courbe, en est une fonction continue, ainsi que les cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ des angles que fait la tangente avec les axes. Les composantes de la tension considérée dans le sens où s augmente sont donc, aux deux extrémités de l'arc ds,

$$T\frac{dx}{ds}, \quad T\frac{dy}{ds}, \quad T\frac{dz}{ds},$$

et

$$T\frac{dx}{ds}+d.\left(T\frac{dx}{ds}\right), \quad T\frac{dy}{ds}+d\left(T\frac{dy}{ds}\right), \quad T\frac{dz}{ds}+d.\left(T\frac{dz}{ds}\right).$$

Supposons les arcs s comptés à partir de l'extrémité A (*fig.* 28), et soit MN l'arc infiniment petit ds. Les directions des deux forces tangentes aux points M et N se rencontrent si la courbe est plane, et elles peuvent être considérées comme se rencontrant même dans le cas d'une courbe à double courbure, parce que leur plus courte distance est infiniment petite par rapport à ds. Elles ont donc une résultante; et par conséquent les forces qui agissent en tous les points de MN doivent avoir une résultante égale et opposée à la première, et, par suite, comprise dans le plan osculateur de la courbe. Les conditions cherchées de l'équilibre sont donc celles de forces appliquées à un même point, et elles doivent exprimer que les sommes des composantes parallèles à chaque axe sont séparément nulles. Si donc on

observe que les composantes $T\frac{dx}{ds}$, $T\frac{dy}{ds}$, $T\frac{dz}{ds}$ doivent être changées de signe, on aura les équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} d.\left(T\dfrac{dx}{ds}\right)+X\,ds=0,\\ d.\left(T\dfrac{dy}{ds}\right)+Y\,ds=0,\\ d.\left(T\dfrac{dz}{ds}\right)+Z\,ds=0.\end{cases}$$

Si l'on multiplie la première par $\frac{dx}{ds}$, la seconde par $\frac{dy}{ds}$, la troisième par $\frac{dz}{ds}$, et qu'on les ajoute, en observant que l'on a

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{ds}\,d.\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\,d.\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}\,d.\frac{dz}{ds}=0,$$

on obtiendra

$$dT+X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0,$$

équation qui pourra remplacer une quelconque des équations (1).

Dans le cas le plus ordinaire, $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ est la différentielle d'une fonction $\varphi(x, y, z)$, et l'on aura alors

$$T=-\varphi(x, y, z)+C;$$

et si l'on connaît la tension T' au point dont les coordonnées sont x', y', z', on aura

$$T-T'=\varphi(x', y', z')-\varphi(x, y, z),$$

de sorte que l'on connaîtra la tension en tout autre point,

en fonction de ses coordonnées; et dans tous les cas, la différence des tensions inconnues qui ont lieu en deux points du fil ne dépendra que des coordonnées de ces points. La valeur de T étant substituée dans deux des équations (1), on aura les équations de la courbe formée par le fil.

86. *Fil sollicité par des forces normales.* — Si la force dont les composantes sont X, Y, Z était normale en tous les points de la courbe, on aurait

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0\,;$$

$\varphi(x, y, z)$ serait constant, et, par suite, T; dans ce cas, le fil est donc également tendu en tous ses points. C'est ce qui aura lieu par exemple lorsqu'il sera tendu sur une surface qui ne produira aucun frottement.

La tension T étant constante, les équations (1) deviennent

$$T\,d.\frac{dx}{ds} = -X\,ds, \quad T\,d.\frac{dy}{ds} = -Y\,ds, \quad T\,d.\frac{dz}{ds} = -Z\,ds,$$

d'où

$$T^2\left[\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = (X^2 + Y^2 + Z^2)\,ds^2,$$

ou, en désignant par P la force, et par R le rayon de courbure,

$$T^2 = P^2 R^2, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{T}{R}.$$

Ainsi, quelle que soit la force normale, le fil prendra une figure telle, que cette force soit en raison inverse du rayon de courbure.

D'où il suit que si la force est constante et que la courbe soit plane, elle formera un arc de cercle.

Si la force normale est la résistance d'une surface, comme elle doit toujours être comprise dans le plan osculateur de la courbe, ce dernier est normal à cette surface, et la courbe

est celle de longueur minimum, entre deux quelconques de ses points.

87. On peut trouver, par des considérations géométriques très-simples, la valeur de la pression exercée sur la surface. Pour cela, considérons la courbe que forme le fil, comme un polygone d'une infinité de côtés égaux entre eux; la résultante des tensions de deux côtés consécutifs AB, BC sera dirigée suivant la ligne BD qui divise l'angle ABC en deux parties égales, et son intensité sera

$$2\,\mathrm{T}\cos\mathrm{CBD}, \quad \text{ou} \quad 2\,\mathrm{T}\,\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}},$$

la ligne CD étant menée perpendiculairement à BC (*fig.* 29). Si l'on représente par R le rayon du cercle qui passe par les trois points A, B, C, et qui n'est autre chose, à la limite, que le cercle osculateur de la courbe, la pression sur la surface sera mesurée par $\mathrm{T}\,\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{R}}$. Lorsque BC tend vers zéro, la pression tend elle-même vers zéro; mais si l'on considère une longueur extrêmement petite α sur le fil, les normales pourront être considérées comme parallèles, et les pressions comme égales, ainsi que les rayons de courbure, en tous les sommets du polygone infinitésimal qui y seront compris: la somme de ces pressions sera donc toujours sensiblement égale à $\frac{\mathrm{T}\alpha}{\mathrm{R}}$, R étant le rayon de courbure en un quelconque des points de l'arc α. Ainsi, la valeur de la pression normale produite par le fil sur la surface, dans une étendue infiniment petite ds, est exprimée par $\frac{\mathrm{T}\,ds}{\mathrm{R}}$, et l'on voit qu'elle est en raison inverse du rayon de courbure au point que l'on considère.

CHAPITRE VIII.

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

88. Les conditions de l'équilibre d'un système quelconque de points ou de corps solides, assujettis à des liaisons arbitraires et soumis à l'action de forces quelconques, peuvent s'exprimer par une seule formule générale, d'une grande importance dans la théorie de l'équilibre et du mouvement.

L'avantage de cette formule, lorsqu'elle sera rigoureusement établie, consistera principalement en ce que les équations particulières de l'équilibre de tout système donné s'en déduiront par des procédés réguliers de calcul; et que l'on pourra, en quelque sorte, considérer la science de l'équilibre de tous les systèmes de points, comme y étant renfermée tout entière. Nous commencerons par faire connaître quelques dénominations généralement adoptées.

Lorsque l'on considère un système quelconque de points dans une première position, et que l'on suppose ensuite que chacun d'eux soit placé dans une position infiniment voisine de celle qu'il occupait, sans cesser de satisfaire à toutes les conditions qui dépendent de la nature du système, on nomme *vitesse virtuelle* d'un quelconque de ces points la droite qui joint sa première position à la seconde. Cette dénomination vient de ce que l'on peut concevoir que ce déplacement se fasse avec uniformité dans un même temps infiniment petit, et qu'alors les espaces parcourus sont proportionnels aux vitesses; et en outre de ce que ce déplacement n'est que possible et ne s'effectue réellement pas.

La vitesse virtuelle d'un point, *estimée suivant une direction déterminée*, est la projection de cette vitesse sur cette direction; elle est regardée comme positive quand la direction du déplacement du point, en passant de sa pre-

mière position à la seconde, fait un angle aigu avec celle suivant laquelle on estime la vitesse; elle est négative quand cet angle est obtus. De sorte qu'on obtient en grandeur et en signe, la vitesse d'un point estimée suivant une direction quelconque, en multipliant la grandeur absolue de cette vitesse par le cosinus de l'angle que sa direction fait avec celle suivant laquelle on l'estime.

On appelle *moment virtuel* d'une force, le produit de son intensité par la vitesse virtuelle de son point d'application, estimée suivant la direction de la force.

Cela posé, le principe des vitesses virtuelles consiste en ce que

Si un système quelconque de points est en équilibre, et que l'on conçoive un déplacement infiniment petit de tous ses points, qui soit compatible avec toutes les conditions auxquelles il est assujetti, la somme des moments virtuels de toutes les forces est nulle, quel que soit ce déplacement. Et réciproquement, si cette condition a lieu pour tous les déplacements virtuels, le système est en équilibre.

Dans cet énoncé, les infiniment petits sont considérés de la manière ordinaire. L'équation n'est exacte qu'en considérant les limites des rapports, après avoir divisé par l'une quelconque des quantités infiniment petites; en d'autre termes, la somme des moments est infiniment petite par rapport à ces moments eux-mêmes.

Avant de passer à la démonstration générale de ce principe, considérons quelques cas particuliers, et d'abord celui d'un point unique.

89. *Cas d'un point unique.* — L'équilibre d'un point entièrement libre exige que la somme des forces estimées suivant une direction arbitraire soit nulle; et réciproquement si cela est, il y a équilibre. Soient donc P l'une quelconque des forces appliquées à ce point, μ l'angle qu'elle

forme avec une direction quelconque, on devra avoir

$$\Sigma P \cos \mu = 0;$$

et réciproquement, si cette équation a lieu pour toute direction, le point sera en équilibre. Si l'on multiplie tous les termes par une quantité arbitraire m, l'équation devient

$$\Sigma P m \cos \mu = 0.$$

Or $m \cos \mu$ est la projection de la grandeur m portée, à partir du point donné, sur la direction que l'on considère, et projetée sur la direction de la force P; de plus, le point étant entièrement libre, m peut être considéré comme la distance de sa première position à une autre quelconque qu'il pourrait prendre; et en la supposant infiniment petite, elle sera ce que nous avons appelé la vitesse virtuelle de ce point. Ainsi $\Sigma P m \cos \mu$ est la *somme* des moments virtuels des forces; donc, si le point est en équilibre, cette somme est nulle, et réciproquement; ce qu'il fallait démontrer. On peut observer que, dans ce cas, on peut prendre, au lieu de la vitesse virtuelle, une quantité finie quelconque; et, de plus, que la somme des moments virtuels est rigoureusement nulle, et non pas seulement égale à une quantité infiniment petite par rapport à ces moments eux-mêmes.

Dans le cas où le point n'est pas en équilibre, il suffirait, pour qu'il y fût, que l'on introduisit une force égale et opposée à la résultante. Or, la somme des moments serait alors nulle, et, de plus, deux forces égales et opposées, appliquées au même point, donnent évidemment des moments virtuels égaux et de signes contraires; donc *le moment virtuel de la résultante est égal, en grandeur et en signe, à la somme des moments virtuels des composantes.*

Dans cette relation, toutes les forces sont considérées en valeur absolue, et il est nécessaire d'examiner si elle se modifie lorsque les composantes sont susceptibles d'être

affectées d'un signe quelconque, comme lorsqu'il s'agit d'une force P que l'on décompose en trois autres X, Y, Z, parallèles à des axes rectangulaires. Si d'abord on suppose ces trois forces positives, les variations δx, δy, δz seront en grandeur et en signes les vitesses virtuelles de ces forces respectives, et l'on aura

$$P\delta p = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

Si maintenant une quelconque d'entre elles, Y par exemple, est négative, la valeur absolue de la force sera $-Y$, mais aussi la vitesse virtuelle sera $-\delta y$, et le moment virtuel sera toujours exprimé par $Y\delta y$; de sorte que l'équation précédente est générale en considérant de la manière ordinaire les signes des composantes, ainsi que des coordonnées : c'est d'ailleurs ce que l'on trouverait directement en projetant sur la résultante la ligne brisée formée par δx, δy, δz et la vitesse virtuelle.

Il est bon de remarquer que si les axes étaient obliques, $X\delta x$ ne serait pas le moment virtuel de la force X, puisque δx ne serait pas la projection de la vitesse virtuelle du point sur la direction de X; il en serait de même des deux autres composantes, et l'équation précédente ne subsisterait plus.

90. Si le point est assujetti à rester sur une surface fixe, nous savons qu'il est nécessaire et suffisant pour l'équilibre que la résultante soit normale à cette surface, et par conséquent que $\Sigma P \cos \mu$ soit nulle pour toutes les directions situées dans le plan tangent. On aurait donc encore, comme dans le cas précédent,

$$\Sigma P m \cos \mu = 0;$$

mais on ne pourrait plus regarder m comme la distance de deux positions possibles du point, puisque l'extrémité de la ligne m ne se trouve pas sur la surface.

Mais, si l'on prend sur la surface même un point situé à une distance infiniment petite δs du premier, la direction de la droite qui les joint a pour limite celle d'une tangente quelconque à la surface, et par conséquent $\Sigma P \cos\mu$ est infiniment petit; donc $\Sigma P \delta s \cos\mu$ est infiniment petit par rapport à δs; et par conséquent, dans le sens ordinaire où l'on entend les équations infinitésimales, on a

$$\Sigma P \delta s \cos\mu = 0.$$

Donc, dans ce nouveau cas d'équilibre, la somme des moments virtuels des forces est nulle pour tous les déplacements infiniment petits, compatibles avec les conditions de la question ; et réciproquement.

91. Si le point est assujetti à rester sur une courbe fixe, il est nécessaire et suffisant pour l'équilibre que la résultante soit normale à la courbe, et, par suite, que la somme des forces estimées dans le sens de la tangente soit égale à zéro. D'où l'on conclut, comme dans le cas précédent, qu'en désignant par δs un arc infiniment petit de la courbe, on aura

$$\Sigma P \delta s \cos\mu = 0,$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre. Il est donc nécessaire et suffisant pour l'équilibre que la somme des moments virtuels des forces soit nulle pour tous les déplacements des points, compatibles avec les conditions auxquelles il est assujetti.

Si le point n'était que posé sur la surface ou sur la courbe, nous avons déjà dit qu'il serait nécessaire, mais non suffisant, que la résultante fût normale. Les conditions que nous venons d'indiquer auraient donc encore lieu, mais ne suffiraient plus.

92. Observons encore que, dans le cas d'équilibre d'un point posé sur une surface, la somme des moments virtuels ne serait plus nulle pour les déplacements d'un point sui-

vant des droites inclinées au plan tangent, quoique ces déplacements soient compatibles avec les conditions de la question. Elle serait égale au moment de la résultante ; or, celui-ci est négatif, puisque la résultante doit appuyer le point sur la surface. D'où l'on conclut que, dans l'équilibre d'un point posé sur une surface, la somme des moments virtuels des forces est nulle quand le point se déplace sur la surface, et négative pour tous les autres déplacements qu'il peut subir.

93. *Cas d'une droite rigide.* — Examinons maintenant le cas de forces quelconques appliquées aux extrémités d'une droite inflexible ; nous pourrons nous borner à considérer, à chacun de ces points, la résultante des forces qui y sont appliquées, puisque son moment virtuel est égal à la somme de ceux de ses composantes. Il faut donc démontrer que, dans le cas d'équilibre, la somme des moments virtuels de ces deux forces est nulle.

1°. Supposons la droite entièrement libre, et soient x, y, z, x', y', z' les coordonnées de ses extrémités M, M', et l sa longueur, on aura

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = l^2;$$

d'où

$$(x-x')(\delta x-\delta x')+(y-y')(\delta y-\delta y')+)z-z')(\delta z-\delta z')=0,$$

$\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \delta y', \delta z'$ étant les accroissements infiniment petits des coordonnées des deux extrémités, pour un déplacement virtuel quelconque.

Or, si l'on appelle α, β, γ les angles formés avec les axes par la direction de la droite MM', on aura

$$\cos\alpha = \frac{x' - x}{l}, \quad \cos\beta = \frac{y' - y}{l}, \quad \cos\gamma = \frac{z' - z}{l};$$

l'équation précédente donne donc

$$\delta x \cos\alpha + \delta y \cos\beta + \delta z \cos\gamma = \delta x' \cos\alpha + \delta y' \cos\beta + \delta z' \cos\gamma;$$

c'est-à-dire que les vitesses virtuelles des extrémités, estimées suivant la direction MM', sont égales. Or, pour qu'il y ait équilibre, les deux forces doivent être égales et dirigées, l'une suivant M'M, l'autre suivant MM'; donc leurs moments virtuels sont égaux et de signes contraires, et, par conséquent, donnent une somme nulle. Et il en serait de même de la somme des moments virtuels de toutes les forces, puisque cette somme est la même que celle des moments des deux forces qui leur ont été substituées.

2°. Supposons maintenant que les extrémités M, M' soient assujetties à rester sur des surfaces ou des courbes données. Il résultera de là de nouvelles forces qui seront normales à ces courbes ou à ces surfaces, en faisant abstraction du frottement. En joignant ces forces inconnues aux forces données, on pourra considérer la droite MM' comme entièrement libre; et, s'il y a équilibre, la somme des moments virtuels sera nulle pour des déplacements arbitraires de MM'. Mais, si l'on veut que, dans cette somme, il n'entre que les forces données, il sera nécessaire et suffisant que le déplacement de chaque extrémité ait lieu sur la surface ou la courbe correspondante, pour que le moment virtuel de la force normale soit nul. D'où l'on conclut que

Si les forces appliquées aux extrémités d'une droite sont en équilibre, et que ces extrémités soient assujetties à rester sur des surfaces ou des courbes fixes, la somme des moments virtuels de ces forces est nulle pour tous les déplacements de la droite qui sont compatibles avec les conditions auxquelles elle est assujettie.

La réciproque est vraie; mais, comme elle ne nous est pas nécessaire, nous ne la démontrerons pas ici; elle se trouvera comprise dans celle qui se rapporte au cas général.

94. *Démonstration générale du principe.* — Considérons un système de points assujettis à des conditions quelconques exprimées par des équations entre leurs coor-

données, et sollicités par des forces quelconques. Le nombre des équations de condition devra être moindre que celui des coordonnées des points donnés, sans quoi ces points seraient fixes, et l'équilibre aurait lieu sans conditions entre les forces. Nous examinerons d'abord le cas où ces équations seront en nombre moindre d'une unité que celui des coordonnées des points du système. Il suffit alors de se donner la valeur d'une de ces coordonnées, pour que toutes les autres soient déterminées; tous les points sont donc assujettis à se mouvoir sur des courbes données, et d'une manière déterminée par le mouvement d'un seul.

Quelles que soient les liaisons réelles qui assujettissent ainsi les points donnés M, M′, M″, etc., on peut les remplacer par d'autres quelconques qui permettraient identiquement les mêmes mouvements. Ainsi, on peut supposer les points M et M′ liés par deux droites de longueurs constantes MN, M′N, assujetties à se rencontrer sur une surface donnée; ce qui détermine la courbe que le point N peut décrire sur cette surface. On peut de même lier M′, M″ par des droites rigides M′N′, M″N′, et assujettir le point N′ à rester sur une surface donnée; on liera de même M″ à un autre point du système, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive au dernier point. Ces nouveaux points N, N′, N″, etc., ne pourront avoir qu'une position unique pour chacune des positions successives que l'on ferait prendre au système des points donnés; ils ne peuvent donc se mouvoir que sur des courbes complétement déterminées. Actuellement, faisons abstraction des liaisons données pour ne plus considérer que le système des premiers points assujettis à rester sur leurs courbes fixes, et des nouveaux points assujettis à rester sur les leurs, également fixées, et liés aux premières par les droites rigides qui ont été introduites. En vertu de ce nouveau mode de liaison, les points donnés sont assujettis identiquement aux mêmes

mouvements qu'ils pouvaient prendre en vertu des premières liaisons : on peut donc substituer ces nouvelles liaisons aux anciennes sans changer les conditions d'équilibre, et l'on aura à considérer un système de points M, N, M', N', M'', N'', etc., liés par des droites rigides et astreints à se mouvoir sur des courbes données, auxquelles on pourra supposer une résistance normale indéfinie.

Soient P, P', P'', etc., les résultantes des forces appliquées respectivement aux points M, M', M'', etc., dont les coordonnées sont $x, y, z, x', y' z', x'', y'', z''$, etc.

Appliquons aux extrémités de MN (*fig.* 30) deux forces égales dirigées suivant cette droite dans des sens différents, et donnons-leur une intensité Q et un sens tels, que le point M soit en équilibre par l'action des forces P et Q et la résistance de la courbe donnée. Cela est toujours possible si la droite MN n'est pas perpendiculaire à cette courbe, et c'est une condition qu'on pourra toujours remplir, puisqu'on est maître de choisir, comme on veut, les longueurs MN, M'N. On peut de même admettre que M'N n'est pas normale à la courbe qui contient M', et il s'ensuivra qu'aucune des deux lignes MN, M'N ne sera normale à la courbe que peut décrire le point N : car, si une droite de longueur constante se déplace de manière que ses deux extrémités parcourent des arcs infiniment petits de même ordre, et que l'un de ces arcs soit perpendiculaire à la droite donnée, l'autre le sera de même. Donc, puisque les droites MN, M'N ne sont pas perpendiculaires sur les courbes décrites par M et M', elles ne le seront pas non plus sur la courbe décrite par N. Nous choisirons toutes les autres longueurs de telle manière, qu'aucune des droites rigides qui lient les points entre eux ne soit normale sur les courbes que ses extrémités peuvent décrire.

Appliquons de même, suivant NM', deux forces Q' égales et contraires, et telles, que le point N soit en équi

libre, par l'action des forces Q, Q'; appliquons ensuite, suivant M'N', des forces Q'' égales et opposées, et telles, que le point M' soit en équilibre; et continuons ainsi jusqu'au dernier point. Les conditions d'équilibre ne sont pas changées par l'introduction des forces qui se détruisent deux à deux, et tous les points sont en équilibre, excepté le dernier. La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre du système est donc celle de l'équilibre de ce point unique.

Pour employer des notations commodes, concevons sur le prolongement de la force P un point déterminé O, et représentons par p la distance OM. Faisons la même chose pour toutes les autres forces. Quand le point M se déplacera infiniment peu, sa distance au point fixe O variera d'une quantité qui pourra être considérée comme égale à la projection de sa vitesse virtuelle sur la direction de P. L'accroissement δp de la distance de M au point O sera positif si la vitesse virtuelle fait un angle aigu avec la direction de la force P; et négatif si cet angle est obtus: de sorte que δp, $\delta p'$, $\delta p''$,..., δq, etc., sont les vitesses virtuelles des points d'application des forces P, P', P'',..., Q, etc., estimées dans les directions de ces forces. Les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre, sur chacune des courbes et sur chacune des droites rigides, seront exprimées par les équations suivantes, en observant que les moments virtuels des forces qui agissent en sens contraires sur chaque droite inflexible sont égaux et de signes contraires :

$$P\,\delta p + Q\,\delta q = 0,$$
$$-Q\,\delta q + Q'\,\delta q' = 0,$$
$$P'\,\delta p' - Q'\,\delta q' + Q''\,\delta q'' = 0,$$
$$-Q''\,\delta q'' + Q'''\,\delta q''' = 0,$$
$$P''\,\delta p'' - Q'''\,\delta q''' + Q^{\text{iv}}\,\delta q^{\text{iv}} = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et il ne faut pas oublier que les vitesses virtuelles δp, $\delta p'$, etc., sont les mêmes que si l'on avait conservé le premier mode de liaison, puisque dans le nouveau les mouvements possibles sont restés identiquement les mêmes.

Le nombre de ces équations surpasse d'une unité celui des quantités Q, Q′, Q″, etc. La première détermine Q; substituant sa valeur dans la seconde, on aura Q′, et en continuant ainsi, la dernière ne renfermera plus aucune des forces auxiliaires, et sera la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre du système. On l'obtient en ajoutant toutes les équations précédentes; les moments virtuels de chacune des forces auxiliaires Q, Q′, etc., entrant chacun dans deux équations consécutives avec des signes contraires, se détruiront, et il restera

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \ldots = 0.$$

Donc, dans le cas que nous considérons, il est nécessaire et suffisant, pour l'équilibre du système, que la somme des moments virtuels des forces données soit nulle pour chacun des deux déplacements opposés, qui sont seuls possibles et qui donnent des moments égaux et de signes contraires.

95. Il ne reste plus qu'à démontrer que, quel que soit le nombre d'équations qui lient les coordonnées des points du système, et, par conséquent, quel que soit le nombre des déplacements compatibles avec ces liaisons, il est nécessaire et suffisant, pour que des forces se fassent équilibre sur ce système, que la somme de leurs moments virtuels soit nulle pour tous ces déplacements infiniment petits.

En effet, considérons un quelconque de ces déplacements et établissons de nouvelles liaisons qui n'en permettent pas d'autres, si ce n'est le déplacement contraire correspondant à des variations égales et de signes contraires des coordonnées; l'équilibre aura encore lieu s'il existait déjà, et, par conséquent, d'après ce qui précède, la somme

des moments virtuels correspondants à ce déplacement est nulle.

Réciproquement, si cette somme est nulle pour tout déplacement possible, il y aura équilibre. En effet, si les forces pouvaient mettre le système en mouvement, tous les points se mouvraient sur certaines courbes que l'on pourrait supposer fixes sans altérer en rien ce mouvement; et l'on pourrait, de plus, supposer des liaisons qui permettraient sur ces courbes le mouvement qui a lieu, mais de telle sorte que le mouvement d'un seul point entraînerait celui de tous les autres. On rentrerait encore dans le premier cas quant aux liaisons, et la somme des moments virtuels serait nulle sans qu'il y eût équilibre, ce qui est contraire à ce qui a été démontré précédemment.

Donc enfin,

Quelles que soient les équations qui lient les coordonnées des points qui composent un système, auquel sont appliquées des forces quelconques, il est nécessaire et suffisant pour l'équilibre que la somme des moments virtuels de ces forces soit nulle pour tous les déplacements infiniment petits, compatibles avec les liaisons du système.

96. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les courbes ne produisaient que des forces normales. Si elles pouvaient détruire des forces dirigées suivant la tangente, au moyen d'un obstacle au mouvement du point dans un sens seulement, l'équilibre pourrait avoir lieu sans que la somme des moments virtuels fût nulle; mais alors elle serait nécessairement négative. En effet, l'obstacle tient lieu d'une force dirigée du côté où le point peut se déplacer. En l'introduisant et supprimant l'obstacle, la somme des moments virtuels sera nulle. Or, si l'on ne considère que le déplacement virtuel compatible avec l'hypothèse de l'obstacle, le moment virtuel de la force introduite sera positif; donc la somme des autres sera négative. Elle serait nulle si l'équi-

libre avait lieu indépendamment de l'obstacle, parce que la force qui le remplacerait serait nulle.

97. Il suit du principe précédent que le moment virtuel de la résultante de forces quelconques est égal à la somme des moments virtuels de ses composantes; car il y aurait équilibre entre ces dernières si l'on y ajoutait une force égale et opposée à leur résultante. La somme totale des moments virtuels serait donc nulle, et, par conséquent, la somme de ceux qui se rapportent aux composantes serait égale et de signe contraire au moment de la force qui leur fait équilibre, et qui est égale et opposée à la résultante. Cette somme est donc égale au moment de la résultante, puisque deux forces égales et contraires, appliquées à un même point, ont des moments virtuels égaux et de signes contraires.

98. Si l'on remplace chaque force par ses composantes parallèles à trois axes rectangulaires, son moment virtuel sera la somme de ceux de ses composantes. Soient X, Y, Z les composantes d'une force appliquée au point M dont les coordonnées sont x, y, z; et δx, δy, δz les variations de ces coordonnées dans un déplacement infiniment petit du système. Les moments virtuels des forces X, Y, Z seront, comme nous l'avons démontré, $X\delta x$, $Y\delta y$, $Z\delta z$, et le moment de leur résultante sera

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z.$$

L'équation générale de l'équilibre d'un système quelconque de points sera donc

$$(1) \qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

la somme Σ s'étendant à toutes les forces du système, et les variations des coordonnées de leurs points d'application pouvant avoir toutes les valeurs compatibles avec les équations qui lient ces coordonnées.

99. Il est facile de voir comment l'équation (1) peut

donner les conditions de l'équilibre d'un système quelconque.

Soient

$$L = 0, \quad L' = 0, \quad L'' = 0, \text{ etc.},$$

n équations données entre les coordonnées des m points qui composent le système; les variations de ces coordonnées satisferont aux équations

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dx}\delta x + \dfrac{dL}{dy}\delta y + \dfrac{dL}{dz}\delta z + \dfrac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dL'}{dx}\delta x + \dfrac{dL'}{dy}\delta y + \dfrac{dL'}{dz}\delta z + \dfrac{dL'}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \dfrac{dL''}{dx}\delta x + \dfrac{dL''}{dy}\delta y + \dfrac{dL''}{dz}\delta z + \dfrac{dL''}{dx'}\delta x' + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si l'on tire de ces n équations la valeur de n variations et qu'on les reporte dans l'équation (1), elle en renfermera encore $3m - n$, qui seront entièrement indéterminées. Et comme cette équation doit avoir lieu pour tous les déplacements qui satisfont aux conditions du système, elle sera satisfaite, quelque valeur que l'on donne à ces indéterminées; ce qui exige que les coefficients de chacune d'elles soient nuls séparément. On aura ainsi $3m - n$ équations, nécessaires et suffisantes pour l'équilibre. En les joignant aux n équations données, on aura un nombre d'équations égal au nombre des coordonnées des points du système.

Elles pourront servir à déterminer les positions d'un certain nombre de points d'application, ainsi que les grandeurs et les directions d'un certain nombre des forces, de manière à ce que l'équilibre ait lieu.

Si les variables dont dépend la position du système n'étaient pas les coordonnées des points qui le déterminent, la forme de l'équation (1) changerait. On trouverait toujours les conditions d'équilibre, en réduisant le plus possible le nombre des variations, au moyen des équations de

condition, et égalant à zéro les coefficients de celles qui resteraient dans l'équation, et seraient complétement indéterminées.

100. L'élimination de n variations entre les équations (1) et (2) peut s'effectuer de différentes manières : on pourrait tirer leurs valeurs des n équations (2) et les substituer dans (1), puis égaler à zéro les coefficients des $3m - n$ restantes. Mais il vaut mieux multiplier les équations (2) par des facteurs indéterminés λ, λ', λ'', etc., puis ajouter à l'équation (1). On égalera ensuite à zéro les coefficients des n variations qu'on voudra éliminer; ce qui déterminera λ, λ', λ'', etc., et enfin on égalera à zéro les coefficients des autres variations. On voit donc qu'après avoir ajouté toutes les équations, on devra annuler séparément les coefficients des $3m$ variations; n de ces équations détermineront λ, λ', λ'', etc., et en substituant leurs valeurs dans les autres, on aura les conditions d'équilibre du système.

101. L'avantage de cette méthode n'est pas d'abréger le calcul, mais de faire connaître les efforts produits par les liaisons, et les forces qui pourraient remplacer les équations qui expriment ces liaisons.

En effet, les $3m$ équations auxquelles on parvient, sont

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
X + \lambda \dfrac{dL}{dx} + \lambda' \dfrac{dL'}{dx} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dx} + \ldots = 0,\\[2ex]
Y + \lambda \dfrac{dL}{dy} + \lambda' \dfrac{dL'}{dy} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dy} + \ldots = 0,\\[2ex]
Z + \lambda \dfrac{dL}{dz} + \lambda' \dfrac{dL'}{dz} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dz} + \ldots = 0,\\[2ex]
X' + \lambda \dfrac{dL}{dx'} + \lambda' \dfrac{dL'}{dx'} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dx'} + \ldots = 0,\\[2ex]
Y' + \lambda \dfrac{dL}{dy'} + \lambda' \dfrac{dL'}{dy'} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dy'} + \ldots = 0,\\[2ex]
Z' + \lambda \dfrac{dL}{dz'} + \lambda' \dfrac{dL'}{dz'} + \lambda'' \dfrac{dL''}{dz'} + \ldots = 0,\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Or ces équations seraient les mêmes, si les équations $L=o$, $L'=o$, etc., n'existaient pas, c'est-à-dire si tous les points étaient libres, et qu'on appliquât au point M une force ayant pour composantes

$$\lambda\frac{dL}{dx},\quad \lambda\frac{dL}{dy},\quad \lambda\frac{dL}{dz},\quad \lambda'\frac{dL'}{dx},\ldots;$$

au point M′ une force ayant pour composantes

$$\lambda\frac{dL}{dx'},\quad \lambda\frac{dL}{dy'},\quad \lambda\frac{dL}{dz'},\quad \lambda'\frac{dL'}{dx'},\ldots;$$

et ainsi de suite pour les autres points.

Quant à la direction de ces forces, en ne considérant d'abord que celles dont les expressions renferment les dérivées de la fonction L, on voit que celle qui est appliquée en M est normale à la surface dont l'équation serait $L=o$, en ne regardant que x, y, z comme variables. Celle qui est appliquée en M′ est normale à la surface dont l'équation serait $L=o$, mais dans laquelle x', y', z' seraient seules variables, et ainsi de suite pour les autres points.

Ce que nous venons de dire de l'équation $L=o$ peut se dire de toutes les autres; et dès qu'on aura déterminé, comme nous l'avons dit, les valeurs de λ, λ', λ'', etc., on connaîtra les grandeurs et les directions des forces dont l'ensemble des liaisons tient la place.

102. Mais on peut aller plus loin, et assigner les forces qui pourraient remplacer individuellement chacune des équations qui expriment les liaisons.

Supposons, pour cela, que l'on supprime la condition $L=o$, en conservant toutes les autres; nous allons voir que l'équilibre aura encore lieu sur le nouveau système si l'on applique au point M les trois composantes $\lambda\frac{dL}{dx}$, $\lambda\frac{dL}{dy}$, $\lambda\frac{dL}{dz}$; au point M′ les composantes $\lambda\frac{dL}{dx'}$, $\lambda\frac{dL}{dy'}$, $\lambda\frac{dL}{dz'}$; et ainsi de suite pour tous les autres points; et que tous les

termes des équations (3), provenant des équations $L' = 0$, $L'' = 0$, etc., resteront les mêmes dans les équations d'équilibre du nouveau système. En effet, dans ce système, les forces appliquées aux différents points, au lieu d'être, comme dans le premier, X, Y, Z, X', etc., sont

$$X + \lambda \frac{dL}{dx}, \quad Y + \lambda \frac{dL}{dy}, \quad Z + \lambda \frac{dL}{dz}, \quad X' + \lambda \frac{dL}{dx'}, \ldots,$$

et les équations exprimant les liaisons sont réduites à

$$L' = 0, \quad L'' = 0, \ldots.$$

En traitant cette question comme la précédente, on aura, pour déterminer l'équilibre, les équations suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \left(X + \lambda \frac{dL}{dx}\right) + \lambda_1 \frac{dL'}{dx} + \lambda_2 \frac{dL''}{dx} + \ldots = 0, \\ \left(Y + \lambda \frac{dL}{dy}\right) + \lambda_1 \frac{dL'}{dy} + \lambda_2 \frac{dL''}{dy} + \ldots = 0, \\ \left(Z + \lambda \frac{dL}{dz}\right) + \lambda_1 \frac{dL'}{dz} + \lambda_2 \frac{dL''}{dz} + \ldots = 0, \\ \left(X' + \lambda \frac{dL}{dx'}\right) + \lambda_1 \frac{dL'}{dx'} + \lambda_2 \frac{dL''}{dx'} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Or, λ ayant été pris avec la valeur qu'il avait d'après les équations (3), il est clair que toutes les équations (4) sont satisfaites, en prenant pour λ_1, λ_2, etc., les valeurs mêmes de λ', λ'', etc. D'où l'on conclut, comme nous l'avons annoncé, que, si l'on supprime du premier système les liaisons qu'exprime l'équation $L = 0$, et qu'on introduise en chaque point trois forces parallèles aux axes et égales au produit de λ par les dérivées partielles de la fonction L par rapport aux coordonnées respectives de ces divers points, l'équilibre ne sera pas troublé ; et l'ensemble des forces qui remplaceraient les liaisons restantes est représenté par l'en-

semble des termes des équations (3) qui proviennent des fonctions L', L'', etc.

Si, dans le nouveau système, on supprimait encore les liaisons exprimées par une autre équation, on verrait de même qu'il faudrait introduire en chaque point des forces représentées par les termes des équations (3) qui renferment les dérivées partielles de cette équation; car ces termes sont les mêmes dans les équations (3) et (4); et ainsi de suite.

On connaît donc ainsi les forces qui pourraient, sans rien déranger daus l'équilibre, remplacer l'une quelconque des équations de liaison.

Il faut remarquer, toutefois, que l'équation $L = 0$ pourrait résulter de liaisons matérielles très-variées, et les efforts produits sur ces liens devront être calculés suivant leur nature. Ce que nous avons déterminé seulement, ce sont les forces qui en résultent sur les points dont les coordonnées sont x, y, z, x', y', etc.

103. Deux systèmes de forces appliquées à des points liés entre eux d'une manière quelconque sont dits *équivalents* lorsqu'ils pourraient être détruits séparément par les mêmes forces; et il est clair que la même propriété ne se conserverait pas en général, si la nature des liaisons changeait. Or il résulte du principe des vitesses virtuelles que la somme des moments virtuels de deux systèmes équivalents est la même, puisqu'elle est égale et de signe contraire à une même somme.

Si deux systèmes peuvent être détruits séparément par un troisième, il est évident que tout autre système qui détruirait l'un des deux détruirait l'autre, puisque la somme de leurs moments virtuels serait la même, en vertu de la première condition. Réciproquement, si la somme des moments virtuels de deux systèmes est la même, ils feraient évidemment équilibre aux mêmes systèmes.

Application du principe des vitesses virtuelles à l'équilibre d'un fil flexible.

104. L'équation que nous allons traiter dépend du calcul des variations, puisque nous devrons considérer tous les points du fil comme se déplaçant infiniment peu, et que l'intégrale qui exprime la somme des moments virtuels devant être nulle, elle aura sa dérivée nulle. Il s'agira donc de déterminer la forme de la courbe par la condition que la variation d'une intégrale définie, prise dans toute son étendue, soit nulle en passant de cette courbe à toute autre infiniment voisine; pourvu que tous ses points n'aient fait que se déplacer, et que les éléments infiniment petits qui la composent aient respectivement conservé leur grandeur. Or, ce problème est du genre de ceux que le calcul des variations a pour objet de résoudre.

Soient $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$ les composantes de la force qui sollicite l'élément ds; le principe des vitesses virtuelles donnera l'équation

$$\int ds(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0,$$

cette intégrale étant prise dans toute l'étendue du fil, et les variations δx, δy, δz étant telles, que l'élément quelconque ds conserve la même longueur, c'est-à-dire que l'on ait

$$\delta\,ds = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{ds}\,d\delta x + \frac{dy}{ds}\,d\delta y + \frac{dz}{ds}\,d\delta z = 0.$$

Cette équation a lieu pour tous les éléments, et l'on a, par conséquent, autant d'équations de condition que d'éléments. D'après la théorie précédente, on doit les multiplier par des coefficients indéterminés, variant de l'une à l'autre, et qui, par conséquent, dépendent de s: de sorte

qu'on peut les représenter tous par une fonction quelconque de s, que nous désignerons par λ; et, ensuite, on doit ajouter tous ces produits à la somme des moments virtuels, puis égaler à zéro les coefficients de toutes les variations. Cette somme sera une intégrale prise entre les mêmes limites que la première, et l'on aura ainsi l'équation d'équilibre :

$$X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Z_1\delta z_1 + X_2\delta x_2 + Y_2\delta y_2 + Z_2\delta z_2$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\left[\begin{array}{c} ds\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \\ +\lambda\left(\dfrac{dx}{ds}d\delta x + \dfrac{dy}{ds}d\delta y + \dfrac{dz}{ds}d\delta z\right)\end{array}\right] = 0,$$

$x_1\,y_1\,z_1$, $x_2\,y_2\,z_2$ étant les coordonnées des extrémités, et $X_1\,Y_1\,Z_1$, $X_2\,Y_2\,Z_2$ les composantes des forces qui y sont appliquées.

Mais on a

$$\int\lambda\frac{dx}{ds}d\delta x = \lambda\frac{dx}{ds}\delta x - \int\delta x d.\lambda\frac{dx}{ds},$$
$$\int\lambda\frac{dy}{ds}d\delta y = \lambda\frac{dy}{ds}\delta y - \int\delta y d\ \lambda\frac{dy}{ds},$$
$$\int\lambda\frac{dz}{ds}d\delta z = \lambda\frac{dz}{ds}\delta y - \int\delta z d.\lambda\frac{dz}{ds};$$

l'équation précédente devient donc

$$\left[X_1 - \left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)_1\right]\delta x_1 + \left[Y_1 - \left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)_1\right]\delta y_1 + \left[Z_1 - \left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)_1\right]\delta z_1$$
$$+\left[X_2 + \left(\lambda\frac{dx}{ds}\right)_2\right]\delta x_2 + \left[Y_2 + \left(\lambda\frac{dy}{ds}\right)_2\right]\delta y_2 + \left[Z_2 + \left(\lambda\frac{dz}{ds}\right)_2\right]\delta z_2$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\left[\begin{array}{c}\left(X\,ds - d.\lambda\dfrac{dx}{ds}\right)\delta x + \left(Y\,ds - d.\lambda\dfrac{dy}{ds}\right)\delta y \\ +\left(Z\,ds - d.\lambda\dfrac{dz}{ds}\right)\delta z\end{array}\right] = 0.$$

Il faut maintenant égaler à zéro les coefficients des varia-

tions de tous les points. On devra donc avoir, pour un point quelconque du fil,

$$(1)\quad X\,ds - d.\lambda\frac{dx}{ds} = 0,\quad Y\,ds - d.\lambda\frac{dy}{ds} = 0,\quad Z\,ds - d.\lambda\frac{dz}{ds} = 0,$$

et, pour les points extrêmes,

$$(2)\quad \begin{cases} X_1 - \left(\lambda\dfrac{dx}{ds}\right)_1 = 0, & Y_1 - \left(\lambda\dfrac{dy}{ds}\right)_1 = 0, \quad Z_1 - \left(\lambda\dfrac{dz}{ds}\right)_1 = 0; \\ X_2 + \left(\lambda\dfrac{dx}{ds}\right)_2 = 0, & Y_2 + \left(\lambda\dfrac{dy}{ds}\right)_2 = 0, \quad Z_2 + \left(\lambda\dfrac{dz}{ds}\right)_2 = 0. \end{cases}$$

Les équations (1) sont les mêmes que celles du n° 85, dans lesquelles T est changé en $-\lambda$. Éliminant entre elles λ, on aura les deux équations de la courbe, et la valeur de λ s'en-suivra. Les équations (2) feront connaître les grandeurs et les directions des forces qui doivent être appliquées aux extrémités.

On peut remarquer que l'équation précédente, fournie par le principe des vitesses virtuelles, serait la même si chaque élément, au lieu d'être lié aux autres, était entièrement libre, pourvu que sa première extrémité fût sollicitée par les forces $\lambda\frac{dx}{ds}$, $\lambda\frac{dy}{ds}$, $\lambda\frac{dz}{ds}$, qui se réduisent à une force tangente égale à λ, dirigée en sens contraire de l'élément, et que la seconde extrémité fût sollicitée par une force tangente égale à $\lambda + d\lambda$, et dirigée suivant le prolongement de l'élément. D'où il résulte que l'indéterminée $-\lambda$ mesure en chaque point la tension du fil, ce qui s'accorde avec ce qui a été dit n° 85.

Remarques sur l'équilibre d'un système quelconque.

105. Lorsque l'expression $\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)$ sera la variation d'une certaine fonction de x, y, z, x', y',

z', etc., traitées comme variables indépendantes, l'équation donnée par le principe des vitesses virtuelles montre que, dans la position d'équilibre, cette fonction est, en général, un maximum ou un minimum par rapport à toutes les valeurs qu'elle peut prendre lorsque le système subit un déplacement infiniment petit quelconque, compatible avec ses liaisons; le minimum correspond au cas de l'équilibre instable, et le maximum au cas de l'équilibre stable. Mais cette discussion nous écarterait trop de notre objet, et nous nous bornerons à examiner le cas simple d'un système quelconque de points sollicités par des forces parallèles proportionnelles aux masses.

Si l'on prend l'axe des z en sens contraire de la direction de ces forces, on aura

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g dm,$$

dm désignant la masse d'un quelconque des éléments. L'expression $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ devient alors $-g\Sigma dm\,\delta z$; et l'équation d'équilibre sera

$$\Sigma dm\,\delta z = 0, \quad \text{ou} \quad \delta\Sigma z\,dm = 0;$$

donc $\Sigma z\,dm$ est maximum ou minimum. Mais $\Sigma z\,dm$ est égal au produit de la masse du système par le z du centre des forces parallèles; donc ce centre est le plus haut ou le plus bas possible, lorsque le système est en équilibre. Le premier cas est relatif au minimum de l'intégrale de $-g\Sigma dm\,\delta z$; il correspond à l'équilibre instable, et le second à l'équilibre stable. On en voit un exemple bien simple dans l'équilibre d'un cylindre elliptique posé sur un plan horizontal.

106. *Autre propriété de maximum ou de minimum.* — Soient P, P', etc., des forces en équilibre sur un système quelconque; M, M', etc., leurs points d'application. Prenons à partir de ces points, et sur la direction des forces,

des longueurs MN, M′N′, etc., proportionnelles à ces forces, et désignons-les par p, p', etc., de telle sorte que l'on ait

$$p = k\text{P}, \quad p' = k\text{P}', \ldots.$$

Le théorème que nous voulons démontrer consiste en ce que la somme $p^2 + p'^2 + \ldots$ ou Σp^2 sera un maximum ou un minimum, parmi toutes les valeurs qu'elle peut prendre lorsque, les points N, N′, etc., restant fixes, les points M, M′, etc., subissent un déplacement virtuel quelconque, compatible avec les liaisons du système.

En effet, soient L (*fig.* 31) une position infiniment voisine que peut prendre le point M; H sa projection sur la direction de la force P; θ l'angle PML; faisons $\text{ML} = r$, $\text{MH} = \delta p$.

Le principe des vitesses virtuelles donne pour tous les déplacements possibles $\Sigma \text{P}\delta p = 0$; et, par conséquent, en multipliant tous les termes par k,

$$\Sigma p \delta p = 0, \tag{1}$$

équation qui équivaut à

$$\delta \Sigma p^2 = 0; \tag{2}$$

d'où il suit que généralement Σp^2 sera un maximum ou un minimum pour tous les déplacements infiniment petits des points M, compatibles avec les liaisons du système; car c'est avec cette dernière condition que les δp sont entendus dans l'équation (1).

Pour reconnaître si Σp^2 est un maximum ou un minimum, calculons exactement son accroissement. Si nous désignons par p_1 la valeur NL de p après le déplacement virtuel arbitraire, nous aurons

$$p_1^2 = p^2 - 2pr\cos\theta + r^2,$$

d'où

$$\Sigma p_1^2 = \Sigma p^2 - 2\Sigma pr\cos\theta + \Sigma r^2.$$

L'accroissement de Σp^2 est donc

$$(3) \qquad \delta\Sigma p^2 = -2\Sigma pr\cos\theta + \Sigma r^2.$$

Or le premier terme de cette expression n'est autre chose que $-2\Sigma p\,\delta p$, puisque l'on a

$$r\cos\theta = \delta p;$$

donc, si l'on avait rigoureusement l'équation (1), $\delta\Sigma p^2$ se réduirait à Σr^2 qui est essentiellement positive, d'où il suivrait que Σp^2 serait toujours minimum. Mais nous avons fait remarquer, dans la démonstration du principe des vitesses virtuelles, que $\Sigma p\,\delta p$ n'était pas généralement nul, mais infiniment petit du second ordre; et comme Σr^2 est du même ordre, les deux parties de $\delta\Sigma p^2$ sont comparables, et l'on ne peut rien dire d'absolu sur le signe du résultat. Cependant on peut faire quelques remarques importantes à cet égard.

Supposons d'abord que $\Sigma P\,\delta p$ soit de même signe pour tous les déplacements virtuels, il faudra distinguer deux cas.

S'il est négatif, les deux termes de l'expression (3) seront positifs, et, par conséquent, Σp^2 sera un minimum, quelle que soit la valeur du rapport k, depuis zéro jusqu'à l'infini.

S'il est positif, la première partie de $\delta\Sigma p^2$ sera négative, et comme elle varie proportionnellement à k, on pourra donner à ce rapport une valeur assez grande pour que cette première partie l'emporte sur la seconde Σr^2, quel que soit le déplacement virtuel, et cela aura lieu depuis cette valeur de k jusqu'à l'infini : dans toute cette étendue, Σp^2 sera maximum. Il pourra arriver qu'entre cette limite infé-

rieure de k et une autre valeur plus petite, la première partie de (3) soit tantôt supérieure, tantôt inférieure à la seconde; entre ces limites, il n'y aura ni maximum ni minimum.

Mais ce qui est très-remarquable, c'est que, dans tous les cas, et lors même que $\Sigma P \delta p$ n'a pas le même signe pour tous les déplacements virtuels, on peut donner au rapport k, et, par suite, aux longueurs p, p', etc., des valeurs assez voisines de zéro pour que la première partie de (3) soit incomparablement plus petite que Σr^2. Il suffit, en effet, de supposer que p, p' soient des infiniment petits du premier ordre, parce que la première partie de l'expression (3) deviendra infiniment petite du troisième ordre, et l'autre n'étant que du second, son signe prévaudra. D'où il résulte que Σp^2 sera minimum, puisque son accroissement sera toujours positif. Cette dernière proposition est due à M. Gauss; elle n'est qu'un cas particulier d'un théorème que cet illustre géomètre a donné dans le cas d'un mouvement quelconque. C'est là le cas où le mouvement se réduirait à zéro. On peut dire aussi que ce théorème est renfermé dans la proposition précédente, en vertu du principe de d'Alembert, dont nous parlerons plus tard.

Mais il faut bien remarquer que ce n'est pas seulement dans le voisinage de $k = 0$ que Σp^2 sera nécessairement un minimum; il en sera ainsi depuis cette limite jusqu'à une certaine valeur finie de k, pour laquelle la première partie de $\delta \Sigma p^2$ cessera d'être inférieure à la seconde pour tous les déplacements virtuels.

On peut observer encore que lorsque, pour une valeur de k, Σp^2 sera maximum, il suffirait de porter les quantités p dans le sens opposé pour que Σp^2 devînt minimum; car alors $\cos \theta$ changerait de signe sans changer de valeur, et les deux parties de $\delta \Sigma p^2$ seraient positives. Il y aurait donc minimum en considérant cette même valeur de k avec

le système des forces égales et contraires aux premières, et qui seront en équilibre en vertu du principe des vitesses virtuelles.

CHAPITRE IX.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES FORCES PARALLÈLES AU CAS DE LA PESANTEUR.

Considérations générales sur la pesanteur et les centres de gravité.

107. Tous les corps abandonnés à eux-mêmes prennent un mouvement vers l'intérieur de la terre, dans une direction perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles, et qu'on nomme *verticale*. S'ils sont retenus, ils exercent une pression sur l'obstacle dans la même direction. Par exemple, si un corps est suspendu par un fil, ce fil prend une direction verticale; et si l'on détache le corps, il tombe suivant le prolongement de cette droite. L'expérience montre de plus que ce fil est tiré par le corps qu'il soutient, sans interruption et avec une intensité constante dans le même lieu.

On peut donc admettre que tous les corps sont sollicités par une force dirigée suivant la verticale et vers l'intérieur de la terre, et que cette force exerce son action d'une manière continue, avec une intensité constante sur les corps qui ne prennent aucun mouvement. Nous verrons plus tard que cette intensité est la même encore pendant le mouvement. La cause de ces phénomènes se nomme *pesanteur* ou *gravité*. La surface de la terre, ou mieux de la mer, étant à peu près sphérique, la perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles passe sensiblement par le centre de la terre, et change, par conséquent, de direction avec la

position sur la surface; son intensité change quand on s'éloigne ou qu'on s'approche du centre, et dans le même rapport pour tous les corps.

Mais ces variations ne sont pas sensibles dans une petite étendue, et l'on peut regarder les verticales comme parallèles, et la pesanteur comme constante, pourvu que l'on considère des points peu éloignés les uns des autres relativement au rayon de la terre. C'est ce qu'il a été facile d'établir par des expériences précises.

Au reste, il n'est pas besoin de connaître la figure de la terre pour constater, par expérience, le parallélisme des verticales et la constance de la pesanteur dans une étendue beaucoup plus considérable que les dimensions des corps que nous avons en vue de considérer ici. Nous les admettons donc comme des données fournies par des expériences directes.

La pesanteur sollicite les parties intérieures des corps comme les parties extérieures. Il faut faire le même effort pour supporter un corps entier, ou les parties dans lesquelles on le divise; et, s'il est creux, les corps que l'on y renfermera exerceront le même effort que s'ils étaient placés à l'extérieur. Nous pouvons donc regarder cette force comme agissant sur toutes les parties qui composent les corps; et nous en verrons une confirmation complète dans le mouvement qu'ils prennent suivant la verticale.

En appliquant la théorie des forces parallèles à celles qui proviennent de la pesanteur, on reconnaît d'abord qu'elles ont une résultante qui leur est parallèle, et est égale à leur somme; on l'appelle le *poids* du corps.

En second lieu, cette résultante a son point d'application indépendant de la direction des forces relativement au corps. C'est le centre des forces parallèles produites par la gravité. On lui donne le nom de *centre de gravité*.

108. Lorsque la matière qui compose le corps est homo-

gène, les volumes égaux ont des poids égaux. Si la matière de deux corps homogènes est différente, le poids est généralement différent pour des volumes égaux. On appelle *poids spécifique* d'une substance homogène le poids de l'unité de volume, ou, ce qui est la même chose, le rapport du poids d'un volume quelconque de cette substance à ce volume même. Dans les Tables que l'on a formées, on rapporte ces poids spécifiques à celui de l'eau distillée, prise à la température où sa densité est la plus grande, et qui est d'environ 4 degrés au-dessus de zéro; quant aux autres corps, on les suppose pris à la température zéro. Les moyens employés pour sa formation se rapportent à la physique, et nous ne nous en occuperons pas.

Le poids qu'on a choisi pour terme de comparaison est celui de 1 centimètre cube d'eau distillée, prise au maximum de densité, et considéré à l'Observatoire de Paris; on le nomme *gramme*. Les nombres renfermés dans la Table des poids spécifiques expriment donc le nombre de grammes que pèse 1 centimètre cube de ces substances, prises à la température zéro.

109. Si le corps n'est pas homogène, le poids ne sera plus proportionnel au volume. Pour se faire une idée nette de ce que l'on doit entendre par poids spécifique d'une substance en un point donné, on en considérera une portion infiniment petite, dont ce point fera partie, et l'on prendra le rapport de son poids à son volume; on aura ainsi son poids spécifique moyen; lorsque ce volume tend vers zéro, le rapport tend vers une limite que l'on appelle le *poids spécifique de la substance en ce point*. Si la nature de cette substance change d'une manière continue, le poids spécifique sera une fonction continue des coordonnées des différents points; et si cette fonction est donnée, ainsi que la figure du corps, on peut encore se proposer d'en déterminer le centre de gravité. On voit, d'après cette défini-

tion, qu'un volume infiniment petit du corps aura un poids qui ne différera que d'une quantité infiniment petite, par rapport à lui-même, du produit de ce volume par le poids spécifique relatif à l'un quelconque de ses points. Cette quantité pouvant être négligée sans erreur dans les résultats des questions qui ne dépendent que des limites des sommes ou des rapports, il s'ensuit que le poids spécifique tel que nous l'avons défini joue absolument le même rôle dans le cas des corps non homogènes que le poids spécifique défini d'abord dans les corps homogènes; seulement, il ne faut l'appliquer qu'à des volumes infiniment petits dans tous les sens.

110. Quoique les surfaces et les lignes ne puissent avoir de poids, puisqu'elles ne sont que des limites d'étendue et ne renferment aucune partie matérielle, on les considère néanmoins comme ayant un centre de gravité. On suppose alors qu'elles sont soumises à l'action de forces parallèles, qui, dans le cas de l'homogénéité, donnent des résultantes égales pour des parties équivalentes; et l'on donne l'intensité de cette force pour l'unité de surface ou de longueur. En partant de cette hypothèse, et considérant toujours les surfaces et les lignes comme on le fait dans la géométrie, il n'y a rien que de clair dans la recherche du centre de ces forces parallèles, qu'on nomme, par analogie, *centre de gravité.*

Si les résultantes n'étaient pas égales pour des aires équivalentes, on concevrait, pour un point quelconque, une portion infiniment petite renfermant ce point, et on prendrait le rapport de la résultante de cette portion à son aire. La limite de ce rapport sera déterminée, et nous lui donnerons, par analogie, le nom de *poids spécifique de la surface en ce point;* ce poids spécifique sera une fonction connue des coordonnées des points de la surface, et le centre des forces parallèles, que l'on désignera encore sous le nom de *centre de gravité,* sera entièrement déterminé.

Les mêmes considérations s'appliquent au cas d'une ligne dans laquelle des arcs égaux ne donneraient pas des résultantes égales.

111. Les corps sont réellement composés de parties très-petites, séparées les unes des autres; mais il n'y a aucun inconvénient à les supposer formés d'une matière continue; car cela ne produira d'autre effet que de changer de quantités insensibles les points d'application des forces, et il n'en peut résulter aucune erreur appréciable dans les résultats.

112. Lorsque l'on connaît les poids et les centres de gravité de corps en nombre fini, le théorème des moments donne immédiatement la position du centre de gravité du système. Si l'on désigne par P un quelconque des poids, par x, y, z les coordonnées de son centre de gravité, et par x_1, y_1, z_1 celles du centre de gravité du système, on aura

$$x_1 = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}, \quad z_1 = \frac{\Sigma P z}{\Sigma P}.$$

Ces formules subsistent, quel que soit le nombre de corps, et quelque petits qu'ils soient chacun. S'ils diminuent indéfiniment, et que leur système tende vers une certaine limite, les limites des valeurs de x_1, y_1, z_1 seront les coordonnées du centre de gravité de cette limite; et leurs valeurs ne seront pas altérées, si l'on néglige, dans tous les termes de ces sommes, des quantités infiniment petites par rapport à ces termes mêmes.

Détermination des centres de gravité.

113. Lorsqu'un corps de nature quelconque est infiniment petit dans tous les sens, son centre de gravité est à une distance infiniment petite d'un quelconque des points

de ce corps ; car, si l'on compose successivement toutes les forces, en partant d'un point quelconque du corps, les points d'application des résultantes successives étant toujours compris entre les deux points d'application des forces que l'on compose, resteront constamment à une distance infiniment petite de tous les points du corps. Cette simple observation permet de ramener au calcul la détermination des centres de gravité des corps, sans aucune recherche préalable. Il suffira, pour cela, de les décomposer en éléments infiniment petits dans tous les sens, parce qu'alors on pourra prendre pour centre de gravité de ces éléments un point quelconque de leur surface ou de leur intérieur, ou même en dehors, et à une distance infiniment petite ; car on n'altérera qu'infiniment peu les coordonnées du centre de gravité de chacun de ces éléments, et, par conséquent, son moment ne sera en erreur que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même. Donc la limite de la somme des moments ne sera pas altérée, et l'on peut établir cette proposition générale :

Le produit du poids d'un corps par la distance de son centre de gravité à un plan quelconque, est égal à la limite de la somme des produits des poids de chacun de ses éléments infiniment petits en tous sens, par les distances d'un quelconque des points de ces éléments respectifs, ou d'autres points infiniment voisins, à ce même plan.

Si le corps est homogène, le poids d'une quelconque de ses parties est égal à son volume multiplié par le poids spécifique de la substance ; mais, s'il ne l'est pas, le poids d'un élément sera égal à son volume multiplié par un poids spécifique moyen, qui ne différera que d'une quantité infiniment petite du poids spécifique de la substance en un quelconque des points de cet élément. Ainsi, dans ce cas, on multipliera le volume infiniment petit de l'élément par le poids spécifique relatif à l'un quelconque de ses points

ou des points infiniment voisins; et, en substituant ce produit au poids réel de l'élément, il n'en résultera aucune erreur dans la limite de la somme des poids et de leurs moments.

Il est facile de voir comment toutes ces considérations s'appliquent aux surfaces et aux lignes. Nous allons les examiner successivement.

Centres de gravité des lignes.

114. Les équations d'une ligne dans l'espace déterminent deux coordonnées en fonction de la troisième, par exemple y et z en fonction de x. L'expression de l'élément de la ligne est $dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}}=ds$, et son poids pds, p étant une fonction connue de x, qui exprime le poids spécifique de la ligne au point que l'on considère. En appelant P le poids dont les extrémités correspondent aux abscisses x_0, X, on aura

$$P=\int_{x_0}^{X} pds,\quad Px_1=\int_{x_0}^{X} pxds,$$

$$Py_1=\int_{x_0}^{X} pyds,\quad Pz_1=\int_{x_0}^{X} pzds;$$

d'où l'on tirera P, x_1, y_1, z_1.

Si la ligne est homogène, p est constant, $\frac{P}{p}$ est la longueur s de l'arc, et l'on a simplement

$$s=\int_{x_0}^{X} dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}},\quad sx_1=\int_{x_0}^{X} xds,$$

$$sy_1=\int_{x_0}^{X} yds,\quad sz_1=\int_{x_0}^{X} zds.$$

Si la ligne est plane, on la supposera dans le plan XY, et il suffira de faire $z = 0$ dans les premières ou les secondes formules, suivant que cette ligne a un poids spécifique variable ou constant. Dans ce dernier cas, elles deviennent

$$s = \int_{x_0}^{X} dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \quad sx_1 = \int_{x_0}^{X} xds, \quad sy_1 = \int_{x_0}^{X} yds.$$

Centres de gravité des surfaces.

115. Si l'on conçoit une surface courbe décomposée en éléments infiniment petits dans tous les sens, par deux séries de plans, les uns perpendiculaires à l'axe des x, les autres à l'axe des y, nous avons vu que l'on pouvait prendre, au lieu de l'élément même de la surface, l'expression $dx\,dy\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$, que nous représenterons par dA. Soit p la fonction de x et y, qui exprime le poids spécifique en un point quelconque de la surface; le poids de cet élément sera pdA, et ses moments seront $pxdA$, $pydA$, $pzdA$; on aura donc, en désignant par P le poids de l'aire totale que l'on considère,

$$P = \iint pdA, \quad Px_1 = \iint pxdA, \quad Py_1 = \iint pydA, \quad Pz_1 = \iint pzdA.$$

Les limites de ces intégrales sont les mêmes que pour la quadrature des surfaces courbes.

Si la surface est homogène, p est constant et $\frac{P}{p}$ est l'aire totale que nous représenterons par A : on aura alors

$$A = \iint dx\,dy\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}, \quad Ax_1 = \iint xdA,$$

$$Ay_1 = \iint ydA, \quad Az_1 = \iint zdA.$$

116. *Surfaces de révolution.* — Le centre de gravité d'une surface de révolution homogène est évidemment situé sur son axe. Si on le prend pour axe des x, on aura

$$y_1 = 0, \quad z_1 = 0,$$

et il suffira de connaître x_1. Si l'on considère la partie de la surface comprise entre les deux plans correspondants aux valeurs x_0 et X, on aura, en désignant son aire par A, et par y l'ordonnée de la génératrice,

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{X} y\,dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \quad A x_1 = 2\pi \int_{x_0}^{X} yx\,dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

On connaîtra ainsi A et ensuite x_1.

117. *Surfaces planes.* — Lorsque la surface est plane, on la rapporte à deux axes situés dans son plan.

Les formules générales s'appliqueront à ce cas en y supposant $z = 0$; elles deviennent alors

$$P = \iint p\,dx\,dy, \quad P x_1 = \iint px\,dx\,dy, \quad P y_1 = \iint py\,dx\,dy.$$

On intégrera d'abord par rapport à y entre les deux valeurs y_0, Y qui sont des fonctions de x données par l'équation de la courbe qui termine la surface. On aura ainsi des fonctions de x qu'on intégrera entre les valeurs extrêmes x_0, X.

Si la surface est homogène, p est constant, $\frac{P}{p}$ est l'aire A, et l'on aura

$$A = \iint dx\,dy, \quad A x_1 = \iint x\,dx\,dy, \quad A y_1 = \iint y\,dx\,dy,$$

ou

$$A = \int_{x_0}^{X} (Y - y_0)\,dx, \quad A x_1 = \int_{x_0}^{X} (Y - y_0)\,x\,dx,$$

$$A y_1 = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{X} (Y^2 - y_0^2)\,dx.$$

118. *Corps solides.* — Décomposons le corps en une infinité de tranches par une série de plans perpendiculaires à l'axe des x; coupons-le ensuite par une série de plans perpendiculaires à l'axe des y : les parties comprises entre deux plans consécutifs d'une série et deux plans consécutifs de l'autre seront précisément celles que nous avons considérées dans la mesure des volumes en général. Mais, comme nous devons prendre ici des éléments infiniment petits dans tous les sens, nous supposerons une troisième série de plans perpendiculaires à l'axe des z, et le corps se trouvera décomposé en parallélipipèdes rectangles ayant pour arêtes dx, dy, dz.

Pour chacun de ces parallélipipèdes dont les coordonnées de deux sommets opposés sont x, y, z et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, on prendra x, y, z au lieu des coordonnées du centre de gravité, et la fonction p qui exprime le poids spécifique sera rapportée aux mêmes valeurs x, y, z; nous avons prouvé que la limite de la somme des moments n'en sera pas altérée. De cette manière, le poids et les moments de cet élément par rapport aux plans coordonnés pourront être remplacés respectivement par

$$p\,dx\,dy\,dz,\quad px\,dx\,dy\,dz,\quad py\,dx\,dy\,dz,\quad pz\,dx\,dy\,dz.$$

Soient z_0, Z les fonctions de x et y qui expriment les ordonnées de la surface inférieure et de la surface supérieure du corps; on fera d'abord la somme des éléments en supposant que x et y restent constants, et que z passe par toutes les valeurs entre z_0, Z; c'est-à-dire qu'on intégrera ces expressions par rapport à z entre les limites z_0, Z, et l'on obtiendra ainsi des fonctions de x et y seulement, qui exprimeront le poids et les moments de la partie du corps comprise entre quatre plans infiniment voisins, dont deux sont perpendiculaires à l'axe des x et les deux autres à l'axe

des y. Ces fonctions auront pour expressions

$$dx\,dy\int_{z_0}^{Z} p\,dz,\quad x\,dx\,dy\int_{z_0}^{Z} p\,dz,$$
$$y\,dx\,dy\int_{z_0}^{Z} p\,dz,\quad dx\,dy\int_{z_0}^{Z} pz\,dz.$$

Pour avoir le poids et les moments du volume compris entre les deux plans perpendiculaires à l'axe des x, il faudra intégrer ces fonctions de x et y par rapport à y en considérant x comme constant, et prenant pour limites de y les deux fonctions de x qui expriment les ordonnées de la courbe qui est la projection de la surface sur le plan XY, et que nous avons donné le moyen de déterminer dans le *Cours d'Analyse*. Désignant par y_0 et Y ces fonctions connues de x, les sommes relatives à la partie comprise entre les deux plans seront

$$dx\int_{y_0}^{Y} dy\int_{z_0}^{Z} p\,dz,\quad x\,dx\int_{y_0}^{Y} dy\int_{z_0}^{Z} p\,dz,$$
$$dx\int_{y_0}^{Y} y\,dy\int_{z_0}^{Z} p\,dz,\quad dx\int_{y_0}^{Y} dy\int_{z_0}^{Z} pz\,dz.$$

Ces quatre expressions ne renferment plus que la variable x, et on les intégrera entre les deux valeurs de x relatives aux deux plans perpendiculaires à l'axe des x entre lesquels le corps se trouvera compris. Ces valeurs x_0 et X sont, en général, celles pour lesquelles les plans tangents au corps sont perpendiculaires à l'axe des x. Dans tous les cas, on saura les déterminer d'après la forme de la surface, et les expressions des sommes seront respectivement

$$\int_{x_0}^{X} dx\int_{y_0}^{Y} dy\int_{z_0}^{Z} p\,dz,\quad \int_{x_0}^{X} x\,dx\int_{y_0}^{Y} dy\int_{z_0}^{Z} p\,dz,$$
$$\int_{x_0}^{X} dx\int_{y_0}^{Y} y\,dy\int_{z_0}^{Z} p\,dz,\quad \int_{x_0}^{X} dx\int_{y_0}^{Y} dy\int_{z_0}^{Z} pz\,dz.$$

On pourrait effectuer ces intégrations dans un ordre différent et commencer par la somme des éléments pour lesquels x et z seraient constants, ou encore y et z. On pourra même suivre un ordre différent pour chacune des quatre expressions si l'on y trouve quelque avantage : on obtiendra toujours les mêmes valeurs définitives, puisqu'elles représenteront le poids du corps et les limites des sommes des moments des mêmes éléments considérés seulement dans un ordre différent. Si nous désignons ces diverses expressions par

$$\iiint p\,dx\,dy\,dz,\quad \iiint px\,dx\,dy\,dz,\quad \iiint py\,dx\,dy\,dz,\quad \iiint pz\,dx\,dy\,dz,$$

en faisant les intégrations comme nous l'avons indiqué, les coordonnées x, y, z seront déterminées, ainsi que le poids P, par les quatre équations suivantes :

$$\mathrm{P} \;\;= \iiint p\,dx\,dy\,dz,\qquad \mathrm{P}x_1 = \iiint px\,dx\,dy\,dz,$$
$$\mathrm{P}y_1 = \iiint py\,dx\,dy\,dz,\qquad \mathrm{P}z_1 = \iiint pz\,dx\,dy\,dz.$$

Si le poids spécifique est constant, ces équations deviennent, en représentant par V le volume du corps qui est égal à $\frac{\mathrm{P}}{p}$,

$$\mathrm{V} \;\;= \iiint dx\,dy\,dz,\qquad \mathrm{V}x_1 = \iiint x\,dx\,dy\,dz,$$
$$\mathrm{V}y_1 = \iiint y\,dx\,dy\,dz,\qquad \mathrm{V}z_1 = \iiint z\,dx\,dy\,dz.$$

On peut effectuer dans ce cas une des intégrations, par exemple celle par rapport à z ; on aura, en prenant pour limites z_0 et Z,

$$\mathrm{V} \;\;= \iint (\mathrm{Z} - z_0)\,dx\,dy,\qquad \mathrm{V}x_1 = \iint (\mathrm{Z} - z_0)\,x\,dx\,dy,$$
$$\mathrm{V}y_1 = \iint (\mathrm{Z} - z_0)\,y\,dx\,dy,\qquad \mathrm{V}z_1 = \tfrac{1}{2}\iint (\mathrm{Z}^2 - z_0^2)\,dx\,dy,$$

les limites relatives à y et x étant les mêmes que précédemment.

Enfin, si l'on pouvait reconnaître immédiatement le

centre de gravité de la partie comprise entre deux plans infiniment voisins, perpendiculaires à l'un des axes, par exemple à l'axe des x, on prendrait ces parties pour les éléments du corps, et il n'y aurait que la seule variable x dans l'expression de leurs moments par rapport à YZ; une seule intégration donnerait donc le centre de gravité du corps, s'il devait se trouver sur une ligne connue. Nous allons en donner quelques exemples.

119. *Solides de révolution.* — La substance qui compose le solide de révolution étant supposée homogène, il résulte de la symétrie que le centre de gravité est situé sur l'axe, soit qu'on considère le corps entier, ou une partie comprise entre deux plans perpendiculaires à cet axe. Si, pour plus de simplicité, on le prend pour axe des x, il suffira de trouver x_1, parce que y_1 et z_1 seront nuls. On aura, dans ce cas, les deux équations suivantes, dans lesquelles Y et y_0 désignent les ordonnées des deux courbes qui terminent l'aire génératrice située dans le plan XY :

$$V = \pi \int_{x_0}^{X} (Y^2 - y_0^2)\, dx, \quad V x_1 = \pi \int_{x_0}^{X} (Y^2 - y_0^2)\, x\, dx,$$

d'où l'on tirera V et x_1.

120. *Cylindres.* — Si l'on considère un cylindre homogène ayant une base quelconque terminée par un contour polygonal ou curviligne, et qu'on le partage par des plans parallèles aux bases, la somme des moments est nulle par rapport au plan également distant des bases; le centre de gravité est donc sur ce plan.

Si l'on conçoit ensuite un système de plans infiniment voisins, parallèles entre eux et aux arêtes, le cylindre se trouvera décomposé en parallélipipèdes dont les bases seront les éléments des bases du cylindre, et dont les moments seront proportionnels à ceux de leurs bases, par rapport à tout plan parallèle à leurs faces finies. Donc les

sommes des moments, soit des faces, soit des parallélipipèdes, seront nulles pour le même plan. Donc tout plan parallèle aux arêtes, et passant par la ligne qui joint les centres de gravité des deux bases, contient le centre de gravité du cylindre. Donc ce point se trouve et sur cette droite, et sur le plan équidistant des bases; *il est donc au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.*

121. Si le corps était rapporté à des coordonnées polaires, on emploierait le mode de décomposition indiqué dans le *Cours d'Analyse;* mais on chercherait encore les coordonnées rectangulaires du centre de gravité. Les équations entre les coordonnées rectangulaires et polaires sont

$$z = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad x = r\sin\theta\cos\psi.$$

Nous avons vu que l'élément du volume avait pour expression $r^2\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, dr$. Donc l'élément du poids sera $pr^2\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, dr$, et son moment par rapport à chacun des plans s'obtiendra en multipliant cette expression, successivement par x, y, z ou leurs valeurs en θ, ψ, r. On aura ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \iiint pr^2\sin\theta\, d\theta\, d\psi\, dr,\\
\mathrm{P}x_1 &= \iiint pr^3\sin^2\theta\cos\psi\, d\theta\, d\psi\, dr,\\
\mathrm{P}y_1 &= \iiint pr^3\sin^2\theta\sin\psi\, d\theta\, d\psi\, dr,\\
\mathrm{P}z_1 &= \iiint pr^3\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\psi\, dr.
\end{aligned}$$

Les limites de ces intégrales sont les mêmes que celles que nous avons indiquées dans la cubature des solides.

Diverses propriétés des centres de gravité.

122. Soit un nombre quelconque de corps ayant respectivement pour poids p, p', p'', et dont les centres de gravité respectifs soient distants du centre de gravité de leur sys-

tème, de quantités ρ, ρ', ρ'', ...; prenons ce centre pour le point de rencontre de trois axes rectangulaires avec lesquels les lignes $\rho, \rho', \rho'', \ldots$, font les angles $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$. Le théorème des moments donnera, relativement aux trois plans coordonnés,

$$(1) \qquad \Sigma p\rho\cos\alpha = 0, \quad \Sigma p\rho\cos\beta = 0, \quad \Sigma p\rho\cos\gamma = 0.$$

Donc *il y aurait équilibre entre des forces appliquées à un point situé à l'origine, c'est-à-dire au centre de gravité du système, dirigées suivant les droites* $\rho, \rho', \ldots$, *et proportionnelles aux produits* $p\rho, p'\rho'$. La réciproque est évidente.

Si les poids $p, p', \ldots$ sont égaux, les forces sont proportionnelles aux distances du centre de gravité du système, aux centres de gravité des poids égaux qui le composent.

123. Si maintenant on ajoute les carrés des premiers membres des équations (1), on obtient, en désignant par $\overline{\rho\rho'}$ l'angle des deux rayons ρ et ρ',

$$\Sigma p^2\rho^2 + \Sigma 2pp'\rho\rho'\cos\overline{\rho\rho'} = 0.$$

Mais $\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\overline{\rho\rho'} = r^2$, r étant la distance des centres de gravité des corps p, p'; donc

$$\Sigma p^2\rho^2 + \Sigma pp'(\rho^2 + \rho'^2 - r^2) = 0.$$

Tous les termes qui renferment ρ^2 ont pour expression $p\rho^2(p + p' + p'' + \ldots)$, et l'on en trouverait de semblables pour ρ'^2, ρ''^2, etc...; de sorte qu'en posant $p + p' + p'' + \ldots = \mathrm{P}$, on aura

$$\mathrm{P}\Sigma p\rho^2 = \Sigma pp'r^2.$$

Si tous les poids sont égaux et en nombre m, on a $\Sigma r^2 = m\Sigma\rho^2$.

Cette dernière proposition est un cas particulier de la suivante, où l'on suppose que l'origine des coordonnées

est un point quelconque de l'espace. Le théorème des moments donne alors, en représentant par R la droite menée de l'origine au centre de gravité du système, par a, b, c les angles qu'elle fait avec les axes, par ρ, ρ',..., les distances de l'origine aux centres de gravité des poids p, p',..., et par α, β, γ, α', β', γ',..., les angles que ces droites forment avec les axes,

$$\text{PR}\cos a = \Sigma p\rho\cos\alpha,$$
$$\text{PR}\cos b = \Sigma p\rho\cos\beta,$$
$$\text{PR}\cos c = \Sigma p\rho\cos\gamma;$$

d'où, en ajoutant les carrés des membres de ces équations et observant que les seconds membres sont les mêmes que dans le cas précédent,

$$\text{P}^2\text{R}^2 = \text{P}\,\Sigma p\rho^2 - \Sigma pp'r^2.$$

De cette équation on conclut que *si la distance* R *du centre de gravité d'un système à un point fixe quelconque restant constante, ce système invariable de forme se déplace d'une manière quelconque, la somme des produits des poids par les carrés des distances de leurs centres de gravité à ce point fixe sera constante.*

En effet, R étant constant ainsi que les distances désignées par r, il en résulte que $\Sigma p\rho^2$ est constant.

On voit encore que $\Sigma p\rho^2$ est le plus petit possible quand $\text{R} = 0$, et, par conséquent, le centre de gravité d'un système jouit de cette propriété, que *la somme des produits des poids par les carrés des distances de leurs centres de gravité respectifs à ce point est un minimum.*

Théorème de Guldin.

124. Le volume V, engendré par la surface plane comprise entre deux courbes dont les ordonnées sont y_0, Y, et

deux parallèles à l'axe des y correspondantes aux abscisses x_0, X, a pour expression

$$V = \pi \int_{x_0}^{X} (Y^2 - y_0^2)\, dx.$$

Mais l'ordonnée y_1 du centre de gravité de la surface en question, dont nous désignerons l'aire par A, est donnée par l'équation

$$A y_1 = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{X} (Y^2 - y_0^2)\, dx;$$

donc

$$V = 2\pi y_1 A,$$

et, par conséquent, *le volume engendré par une aire plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan, est égal au produit de cette aire par la circonférence décrite par son centre de gravité.*

125. La surface A, engendrée par la révolution d'un arc de courbe plane tournant autour d'un axe situé dans son plan, a pour expression

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{X} y\, ds.$$

Mais l'ordonnée y_1 du centre de gravité de l'arc s est donnée par l'équation

$$s y_1 = \int_{x_0}^{X} y\, ds;$$

donc

$$A = 2\pi y_1 s,$$

et, par conséquent, *l'aire engendrée par un arc de courbe plane, tournant autour d'un axe situé dans son plan, est égale à cet arc multiplié par la circonférence décrite par son centre de gravité.* Ces deux propositions constituent ce que l'on appelle le *théorème de Guldin.*

Les aires ou les volumes décrits dans une partie quelconque de la révolution étant proportionnels à l'angle dont la figure a tourné, il s'ensuit que, pour en avoir la mesure, il faudra prendre l'arc décrit par le centre de gravité au lieu de la circonférence entière.

126. Si une surface plane tourne successivement autour de plusieurs axes, le volume engendré s'obtiendra en multipliant son aire par la somme des arcs parcourus par son centre de gravité. Cette proposition, étant indépendante de la distance des axes, a lieu encore quand ils se succèdent à des distances infiniment petites, pourvu qu'ils soient toujours dans le plan de la surface mobile; et, dans ce cas, deux axes consécutifs peuvent être parallèles ou se rencontrer.

Par exemple, si l'on suppose une courbe plane, et que la surface génératrice se meuve de manière que son plan soit toujours normal à cette courbe et soit toujours percé par elle au même point, et que tous les points n'aient que des mouvements parallèles au plan de la courbe directrice, on peut regarder un pareil mouvement comme produit par le développement du plan de l'aire génératrice qui serait enroulé sur le cylindre qui aurait pour base la développée de la directrice : il est la limite du mouvement qui aurait lieu autour d'axes perpendiculaires au plan de la directrice et qui tendraient indéfiniment vers les arêtes du cylindre en question.

Si, pour plus de généralité, on considère une courbe à double courbure décrite par un point constant du plan de la surface génératrice, auquel elle soit encore constamment normale, et que l'on prenne pour axes successifs les perpendiculaires aux plans osculateurs menées par les centres de courbure de la directrice, on pourra encore appliquer la même proposition; car, quoique ces axes successifs ne se coupent réellement pas, on peut, en ne considérant que les limites, négliger l'erreur qui en résulterait, parce que

leur distance est une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier.

On peut se représenter ce mouvement en supposant que le plan de la surface génératrice soit enroulé sur la surface polaire de la directrice, qui est le lieu des axes autour desquels s'exécutent les mouvements successifs. Si l'on déroule ensuite ce plan sans glissement, il sera constamment normal à la directrice, et sera toujours rencontré par elle au même point. Par cette suite de rotations infiniment petites, la surface donnée engendrera un volume égal au produit de son aire par la courbe décrite par son centre de gravité. Pour que ce théorème ne subisse aucune modification, il faut supposer que la surface génératrice ne vienne jamais couper les axes de rotation successifs.

Volume du cylindre tronqué.

127. Le volume d'un cylindre tronqué dont la base est sur le plan XY et les arêtes perpendiculaires à ce plan est exprimé par $V = \iint z\,dx\,dy$, z étant l'ordonnée du plan, et les limites des intégrales étant déterminées par le contour de la base qui peut être composé de lignes droites ou courbes. Mais si l'on appelle φ l'angle des plans des deux bases, les éléments de l'aire de la base supérieure sont $\frac{dx\,dy}{\cos\varphi}$: cette aire totale sera $\frac{A}{\cos\varphi}$, en désignant par A la base inférieure, et l'ordonnée du centre de gravité de la base supérieure sera donnée par l'équation

$$\frac{A}{\cos\varphi} z_1 = \iint \frac{z\,dx\,dy}{\cos\varphi}, \quad \text{ou} \quad A z_1 = \iint z\,dx\,dy.$$

Donc $V = A z_1$. Le volume est donc égal à sa base multi-

pliée par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de la base supérieure sur le plan de la base inférieure.

Remarquons maintenant que les centres de gravité des deux bases sont sur une même parallèle aux arêtes. Car, si l'on prend les moments des éléments correspondants $dxdy$ et $\frac{dx\,dy}{\cos\varphi}$ par rapport à un même plan quelconque parallèle aux arêtes, ils seront dans le rapport de $\cos\varphi : 1$; donc ils seront nuls en même temps, et par conséquent tout plan, parallèle aux arêtes, qui passe par le centre de gravité d'une des bases passe par le centre de gravité de l'autre. Ces deux centres sont donc sur une même parallèle aux arêtes. Ainsi, les centres de gravité de toutes les sections planes que l'on peut faire dans un cylindre indéfini sont sur une même droite parallèle aux arêtes; et, par conséquent, toutes les sections du cylindre, menées par un même point de cette droite, ont ce point même pour centre commun de gravité.

Si l'on suppose maintenant un cylindre tronqué dont les arêtes soient obliques sur les deux bases, on peut le regarder comme la différence de deux autres qui auraient pour base la section orthogonale; la différence des perpendiculaires abaissées des centres de gravité des deux bases sur le plan de cette section sera la droite qui joindra ces deux points. D'où résulte ce théorème :

Le volume d'un cylindre tronqué quelconque est égal au produit de la section orthogonale par la droite qui joint les centres de gravité de ses deux bases.

On peut encore énoncer cette proposition d'une autre manière, en observant que le rapport de la section orthogonale à l'une des bases est le cosinus de l'angle de leurs plans ou le sinus de l'angle des arêtes avec cette base, et que, par conséquent, il est égal au rapport de la perpendiculaire à cette base, abaissée du centre de gravité de l'autre,

à la droite qui joint les deux centres. On aura ainsi cet autre énoncé :

Le volume d'un cylindre tronqué est égal au produit d'une des bases par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de l'autre sur le plan de la première.

Application des formules précédentes.

128. *Arc de cercle.* — Soient R (*fig.* 32) le rayon AB de l'arc MN, B le milieu de cet arc ; posons

$$\text{MN} = c, \quad \text{MBN} = l.$$

La symétrie de l'arc par rapport à l'axe des x montre que son centre de gravité est sur cet axe ; on a donc $y_1 = 0$; et x_1 sera donné par l'équation suivante :

$$lx_1 = \int x\,ds = \text{R}\int ds \cos\frac{s}{\text{R}} = \text{R}^2 \sin\frac{s}{\text{R}} + \text{C} = \text{R}c.$$

Ainsi on a la proportion

$$l : c :: \text{R} : x_1.$$

129. *Arc de cycloïde.* — L'équation différentielle de la cycloïde rapportée à son sommet est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}},$$

et donne

$$ds = \sqrt{2a}\,.\,\frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

On aura donc, en faisant commencer l'arc au sommet,

$$s = 2\sqrt{2ay},$$

$$sy_1 = \int y\,ds = \sqrt{2a}\int y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{2\sqrt{2a}}{3}\,y^{\frac{3}{2}},$$

$$sx_1 = \sqrt{2a}\int \frac{x\,dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{2a}\left(xy^{\frac{1}{2}} - \int y^{\frac{1}{2}}\,dx\right)$$

$$= 2\sqrt{2a}\left(xy^{\frac{1}{2}} - \int dy\sqrt{2a-y}\right)$$

$$= 2\sqrt{2a}\left[xy^{\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{3}(2a-y)^{\frac{3}{2}}\right] + \mathrm{C};$$

et comme sx_1 doit être nul, pour $y = 0$, on aura

$$\mathrm{C} = -\frac{16a^2}{3}:$$

d'où

$$y_1 = \frac{y}{3}, \quad x_1 = x + \frac{2(2a-y)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{y}} - \frac{8a^2}{3\sqrt{2ay}}.$$

130. *Arc de parabole.* — Soient

$$y^2 = 2px, \quad ydy = pdx,$$

on aura

$$s = \frac{1}{p}\int dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{1}{p}\left[y\frac{\sqrt{y^2+p^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\,l.\frac{(y+\sqrt{y^2+p^2})}{p}\right],$$

en supposant que l'arc commence au sommet, et, par conséquent, devienne nul pour $y = 0$; on trouvera ensuite

$$sy_1 = \frac{1}{p}\int y\,dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{1}{3p}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{3},$$

$$sx_1 = \frac{1}{p}\int x\,dy\sqrt{y^2+p^2} = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx\sqrt{x+\frac{p}{2}} = \int dx\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}$$

$$= \frac{\left(x+\frac{p}{4}\right)\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}}{2} - \frac{p^2}{32}\,l.\frac{4x+p+4\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}}{p}.$$

On connaîtra donc ainsi x_1 et y_1.

131. *Aire du triangle.* — On prendra l'origine à l'un des sommets, et l'axe des x perpendiculaire à la base. Les

droites dont les deux autres côtés font partie auront des équations de la forme

$$y = mx, \quad y = m'x.$$

Soient a la base et h la hauteur, l'aire du triangle sera égale à $\frac{ah}{2}$, et l'on aura ensuite

$$\frac{ah}{2} x_1 = (m' - m) \int x^2 dx = (m' - m) \frac{x^3}{3},$$

$$\frac{ah}{2} y_1 = \tfrac{1}{2}(m'^2 - m^2) \int x^2 dx = \frac{(m'^2 - m^2)}{6} x^3.$$

Faisant $x = h$ et désignant par p l'ordonnée $\frac{(m + m')}{2} h$ du milieu de la base, il vient

$$x_1 = \frac{2h}{3}, \quad y_1 = \frac{2p}{3}, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{p}{h}.$$

La dernière équation montre que le centre de gravité se trouve sur la droite qui joint le sommet au milieu de la base; et la première indique qu'il est situé aux deux tiers de cette ligne à partir du sommet, ou au tiers à partir de la base.

132. *Aire du cercle.* — Soit $y^2 = R^2 - x^2$ l'équation du cercle, et cherchons le centre de gravité de l'aire comprise entre deux parallèles à l'axe des y, correspondantes aux abscisses x_0, x. Nous aurons, en désignant les aires par la lettre A,

$$A x_1 = \int 2x \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = -\tfrac{2}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{3}(R^2 - x_0^2)^{\frac{3}{2}};$$

supposant $x = R$, il vient

$$A x_1 = \tfrac{2}{3}(R^2 - x_0^2)^{\frac{3}{2}},$$

et

$$A = R^2 \arc \cos \frac{x_0}{R} - x_0 \sqrt{R^2 - x_0^2}.$$

Si, de plus, $x_0 = 0$, on aura

$$A = \frac{\pi R^2}{2}, \quad x_1 = \frac{4R}{3\pi}.$$

Si, au lieu d'un segment, on considère un secteur, la question se ramène de suite à trouver le centre de gravité d'un arc de cercle. En effet, le secteur peut être considéré comme la limite d'une infinité de triangles égaux ayant leur sommet commun au centre. Les centres de gravité de ces éléments sont équidistants et situés sur un arc de cercle compris entre les mêmes rayons que le premier, et décrit du même centre avec un rayon égal à $\frac{2R}{3}$. Le centre de gravité du secteur sera donc le même que celui de cet arc.

133. *Aire de la parabole.* — Soit $y^2 = 2px$, on aura, en considérant l'aire comprise entre l'axe des x, l'ordonnée et l'arc partant du sommet,

$$A = \frac{2\sqrt{2p}}{3} x^{\frac{3}{2}}, \quad A x_1 = \int xy\,dx = \sqrt{2p} \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5} x^{\frac{5}{2}},$$

$$A y_1 = \tfrac{1}{2} \int y^2\,dx = p \int x\,dx = \frac{px^2}{2};$$

d'où

$$x_1 = \tfrac{3}{5} x, \quad y_1 = \tfrac{3}{4} \sqrt{\frac{px}{2}} = \tfrac{3}{8} y.$$

134. *Aire de la cycloïde.* — L'équation de la cycloïde rapportée à son sommet est

$$x = \sqrt{2ay - y^2} + a \arc \cos \frac{a - y}{a},$$

d'où

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}.$$

En considérant l'aire comprise entre l'arc, l'ordonnée et la tangente au sommet, qui est l'axe des x, on aura

$$A = \int dy\sqrt{2ay - y^2} = \frac{(y-a)\sqrt{2ay - y^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arccos\frac{a-y}{a}.$$

On aura ensuite

$$\begin{aligned} Ax_1 &= \int x dy \sqrt{2ay - y^2} \\ &= \int dy(2ay - y^2) + a\int \arccos\frac{a-y}{a}\, dy\sqrt{2ay - y^2}. \end{aligned}$$

La première intégrale est égale à $ay^2 - \frac{y^3}{3}$. Quant à la seconde, nous aurons, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} &\int \arccos\frac{a-y}{a}\, dy\sqrt{2ay - y^2} \\ &= \arccos\frac{a-y}{a}\int dy\sqrt{2ay-y^2} - \int\left(\frac{dy}{\sqrt{2ay-y^2}}\cdot\int dy\sqrt{2ay-y^2}\right) \\ &= \arccos\frac{a-y}{a}\left[\frac{(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arccos\frac{a-y}{a}\right] \\ &\qquad - \int\left[\frac{(y-a)dy}{2} + \frac{a^2}{2}\arccos\frac{a-y}{a}\cdot\frac{dy}{\sqrt{2ay-y^2}}\right] \\ &= \frac{(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{2}\arccos\frac{a-y}{a} + \frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right)^2 \\ &\qquad - \frac{y^2}{4} + \frac{ay}{2} - \frac{a^2}{4}\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right)^2 + C \\ &= \frac{(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{2}\arccos\frac{a-y}{a} \\ &\qquad + \frac{a^2}{4}\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{ay}{2} + C. \end{aligned}$$

Substituant cette expression dans la valeur de Ax_1, nous aurons

$$Ax_1 = \frac{a^2 y}{2} + \tfrac{3}{4} a y^2 - \frac{y^3}{3} + \frac{a(y-a)\sqrt{2ay - y^2}}{2} \operatorname{arc\,cos} \frac{a-y}{a} + \frac{a^3}{4}\left(\operatorname{arc\,cos}\frac{a-y}{a}\right)^2.$$

La constante arbitraire est nulle, en considérant comme égal à zéro l'arc dont le cosinus est 1.

La valeur de y_1 sera donnée par la formule suivante :

$$Ay_1 = \tfrac{1}{2}\int y\,dy\sqrt{2ay-y^2} = \tfrac{1}{2}\int (y-a+a)\,dy\sqrt{2ay-y^2}$$
$$= -\tfrac{1}{6}(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{a(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{4} + \frac{a^3}{4}\operatorname{arc\,cos}\frac{a-y}{a}.$$

x_1 et y_1 sont donc déterminés.

On aurait à effectuer des intégrations du même genre, si l'on considérait un segment placé différemment par rapport à la cycloïde.

135. *Surfaces de révolution.* — Soit d'abord la surface sphérique engendrée par le cercle dont l'équation est

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

on aura entre les limites x_0 et x,

$$A = 2\pi\int y\,ds = 2\pi R\int dx = 2\pi R(x - x_0),$$
$$Ax_1 = 2\pi\int xy\,ds = 2\pi\int xR\,dx = \pi R(x^2 - x_0^2);$$

d'où

$$x_1 = \frac{x + x_0}{2}.$$

136. Considérons maintenant la surface engendrée par un arc de la parabole ayant pour équation

$$y^2 = 2px,$$

tournant autour de l'axe des x. On aura

$$y dy = p dx, \quad ds = \frac{dy\sqrt{y^2+p^2}}{p},$$

$$A = \frac{2\pi}{p}\int y dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{2\pi}{3p}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} + C,$$

$$A x_1 = \frac{2\pi}{p}\int xy dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{\pi}{p^2}\int y^3 dy\sqrt{y^2+p^2}$$

$$= \frac{\pi}{p^2}\left[\frac{y^2}{3}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}\int (y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} y dy\right]$$

$$= \frac{\pi y^2}{3p^2}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2\pi}{15p^2}(y^2+p^2)^{\frac{5}{2}} + C'.$$

Si l'aire commence à partir du sommet de la parabole, on aura

$$C = -\frac{2\pi p^2}{3}, \quad C' = \frac{2\pi p^3}{15}.$$

137. Considérons encore la surface de révolution engendrée par la cycloïde tournant autour de sa tangente au sommet; son aire aura pour expression

$$A = \frac{4\pi y\sqrt{2ay}}{3}.$$

L'abscisse de son centre de gravité sera donnée par l'équation

$$A x_1 = 2\pi\int xy ds = 2\pi\sqrt{2a}\int x y^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= 2\pi\sqrt{2a}\left(\tfrac{2}{3} x y^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}\int y^{\frac{3}{2}} dx\right);$$

mais

$$\int y^{\frac{3}{2}} dx = \int y dy\sqrt{2a-y} = -\tfrac{2}{3} y (2a-y)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{15}(2a-y)^{\frac{5}{2}} + C;$$

donc

$$A x_1 = \tfrac{4}{3}\pi x y\sqrt{2ay} + \frac{8\pi}{45}\sqrt{2a}\,(3y+4a)(2a-y)^{\frac{3}{2}} + C'.$$

Si l'aire commence au sommet, on a

$$C' = -\frac{128\pi a^3}{45};$$

x_1 est donc déterminé.

Si l'on fait $y = 2a$, on trouve

$$A = \frac{16\pi a^2}{3}, \quad x_1 = \pi a - \frac{8a}{15}.$$

Exemples relatifs aux volumes.

138. *Pyramide triangulaire.* — Prenons l'origine au sommet de la pyramide, et l'axe des x perpendiculaire à la base. Soient b l'aire de cette base, et h la hauteur de la pyramide; on aura

$$V = \frac{b}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{bh}{3}, \quad Vx_1 = \frac{b}{h^2}\int_0^h x^3\,dx = \frac{bh^2}{4},$$

d'où

$$x_1 = \frac{3h}{4}.$$

D'ailleurs les centres de gravité des sections parallèles à la base sont en ligne droite, et, par suite, celui de la pyramide est sur cette même droite, qui joint le sommet au centre de gravité de la base. La valeur de x_1 montre qu'il se trouve aux trois quarts de cette ligne à partir du sommet; et comme on a choisi une base quelconque, le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est le point de rencontre de toutes les lignes qui joignent un sommet au centre de gravité de la base opposée.

139. *Cône à base quelconque.* — Si l'on considère d'abord une pyramide polygonale, on peut la partager en pyramides triangulaires, et l'on reconnaît sans peine que son centre de gravité est sur la ligne droite qui renferme

ceux des sections parallèles à la base, et qu'il se trouve aux trois quarts de cette ligne à partir du sommet. Cette proposition étant indépendante du nombre des côtés de la base s'applique à un cône dont la base est une courbe plane quelconque.

140. *Paraboloïde.* — Soient

$$y^2 = 2px, \quad z^2 = 2qx,$$

les équations des deux paraboles principales, et considérons le segment déterminé par un plan perpendiculaire à l'axe principal. Son centre de gravité sera sur cet axe, et il suffit de trouver son abscisse.

Or, on aura

$$\mathrm{V} = 2\pi\sqrt{pq}\int_0^x x\,dx = \pi\sqrt{pq}\,.\,x^2,$$

$$\mathrm{V}x_1 = 2\pi\sqrt{pq}\int_0^x x^2\,dx = \frac{2\pi\sqrt{pq}}{3}x^3,$$

d'où

$$x_1 = \tfrac{2}{3}x.$$

141. *Ellipsoïde.* — Soit l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on aura

$$\mathrm{V} = \frac{\pi bc}{a^2}\int(a^2 - x^2)\,dx, \quad \mathrm{V}x_1 = \frac{\pi bc}{a^2}\int(a^2 - x^2)\,x\,dx;$$

d'où

$$x_1 = \frac{\int(a^2 - x^2)\,x\,dx}{\int(a^2 - x^2)\,dx}:$$

x_1 est donc indépendant des axes b, c. Si l'on fait commencer le segment à partir du centre, on aura

$$x_1 = x\,\frac{6a^2 - 3x^2}{12a^2 - 4x^2}:$$

si l'on fait $x = a$, il vient

$$x_1 = \frac{3}{8} a.$$

142. *Secteur sphérique.* — Les formules que nous avons données en coordonnées polaires s'appliquent avec avantage au volume engendré par un secteur circulaire tournant autour d'un axe, que nous choisirons pour axe des z. On suppose que le poids spécifique p dépend du rayon vecteur ρ et nullement des angles θ et ψ : si les limites du premier de ces angles sont θ_0 et θ, celles du second 0 et 2π, et celles du rayon, R_0 et R, on trouvera

$$P = 2\pi (\cos\theta_0 - \cos\theta) \int_{R_0}^{R} p\rho^2 d\rho,$$

$$P z_1 = \pi (\sin^2\theta - \sin^2\theta_0) \int_{R_0}^{R} p\rho^3 d\rho.$$

On ne peut effectuer les intégrations que quand on connaît la fonction p. Dans le cas où p est constant, on a

$$P = 2\pi p (\cos\theta_0 - \cos\theta) \frac{R^3 - R_0^3}{3},$$

$$P z_1 = \pi p (\sin^2\theta - \sin^2\theta_0) \frac{R^4 - R_0^4}{4}:$$

d'où

$$z_1 = \frac{3(\cos\theta + \cos\theta_0)(R^4 - R_0^4)}{8(R^3 - R_0^3)}.$$

Si $R_0 = 0$ et $\theta_0 = 0$, on trouve

$$x_1 = \frac{3R}{8}(1 + \cos\theta).$$

Équilibre d'un fil pesant.

Chaînette. — On appelle ainsi la courbe formée par un fil flexible dont deux points sont fixes, et qui est soumise à

l'action seule de la pesanteur. Toutes les forces étant parallèles, la courbe sera comprise dans le plan vertical passant par les deux points fixes B et B'. Nous prendrons dans ce plan deux axes de coordonnées rectangulaires, dont l'un AY vertical et en sens contraire de la pesanteur. Nous supposerons le fil homogène, et nous représenterons par ε son poids pour l'unité de longueur; d'où il suit que εs sera le poids d'un arc de longueur s, et que l'on aura

$$X = 0, \quad Y = -\varepsilon.$$

Cela posé, les équations générales se réduiront à

$$d.\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0; \quad d.\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \varepsilon ds = 0;$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$(1) \qquad T\frac{dx}{ds} = c, \quad T\frac{dy}{ds} = \varepsilon s + cc', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon}{c}s + c'.$$

La première de ces équations montre que la composante horizontale de la tension est la même en tous les points.

En différentiant la dernière, on trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varepsilon}{c}\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

ou

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\varepsilon}{c}\sqrt{1+p^2},$$

en posant

$$\frac{dy}{dx} = p.$$

On obtient, en intégrant cette équation,

$$l.(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{\varepsilon}{c}x + \alpha;$$

d'où

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{\varepsilon x}{c} + \alpha}.$$

Résolvant par rapport à p et le remplaçant par $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\varepsilon x}{c} + \alpha} - e^{-\frac{\varepsilon x}{c} - \alpha}\right),$$

et la troisième des équations (1) donne, par suite,

$$s = \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{\varepsilon x}{c} + \alpha} - e^{-\frac{\varepsilon x}{c} - \alpha}\right) - \frac{cc'}{\varepsilon};$$

en intégrant $\frac{dy}{dx}$, on obtient

$$(2) \qquad y = \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{\varepsilon x}{c} + \alpha} + e^{-\frac{\varepsilon x}{c} - \alpha'}\right) + c_1,$$

c_1 étant une nouvelle constante arbitraire. Les quatre constantes c, c', c_1, α se détermineront en exprimant que la courbe passe par les deux points donnés, et a une longueur donnée, et que, de plus, les arcs s se comptent à partir du point B' par exemple.

Nous prendrons, pour plus de simplicité, l'origine des coordonnées en B', et nous désignerons par a et b les coordonnées de B, et par l la longueur totale du fil donné.

Faisant successivement $x = 0$, $y = 0$, puis $x = a$, $x = b$ dans l'équation de la courbe, on obtient

$$\frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right) + c_1 = 0, \quad b = \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{a\varepsilon}{c} + \alpha} + e^{-\frac{a\varepsilon}{c} - \alpha}\right) + c_1;$$

d'où

$$(3) \qquad b = \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{a\varepsilon}{c} + \alpha} + e^{-\frac{a\varepsilon}{c} - \alpha} - e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right).$$

L'équation qui exprime que s est nul pour $x = 0$ est

$$e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 2c',$$

et pour que s soit égal à l pour $x = a$, il faudra qu'on ait

$$l = \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{a\varepsilon}{c} + \alpha} - e^{-\frac{a\varepsilon}{c} - \alpha}\right) - \frac{cc'}{\varepsilon},$$

ou, en substituant la valeur de c' tirée de l'équation précédente,

$$(4) \qquad l = \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{a\varepsilon}{c} + \alpha} - e^{-\frac{a\varepsilon}{c} - \alpha} - e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right);$$

ajoutant et retranchant les équations (3) et (4), il vient

$$l + b = \frac{c}{\varepsilon}\left(e^{\frac{a\varepsilon}{c} + \alpha} - e^{\alpha}\right), \qquad l - b = \frac{c}{\varepsilon}\left(e^{-\alpha} - e^{-\frac{a\varepsilon}{c} - \alpha}\right),$$

ou

$$l + b = \frac{ce^{\alpha}}{\varepsilon}\left(e^{\frac{a\varepsilon}{c}} - 1\right), \quad l - b = \frac{ce^{-\alpha}}{\varepsilon}\left(1 - e^{-\frac{a\varepsilon}{c}}\right);$$

éliminant α entre ces deux équations, en les multipliant membre à membre, on obtiendra, en prenant les racines carrées,

$$\varepsilon\sqrt{l^2 - b^2} = c\left(e^{\frac{a\varepsilon}{2c}} - e^{-\frac{a\varepsilon}{2c}}\right),$$

ou, en posant $\frac{a\varepsilon}{2c} = z$,

$$\frac{e^{z} - e^{-z}}{z} = \frac{2\sqrt{l^2 - b^2}}{a}.$$

La valeur de z peut se déterminer par l'intersection de la courbe $y = e^{z} - e^{-z}$ avec une droite ayant pour équa-

tion

$$y = \frac{2z\sqrt{l^2 - b^2}}{a}.$$

On peut encore résoudre l'équation en z par la méthode ordinaire des substitutions successives. Connaissant z et par suite c, on connaîtra α au moyen d'une quelconque de deux équations qui viennent d'être multipliées entre elles, ou mieux encore, au moyen de l'équation que l'on obtient en les divisant. Cette équation donne, en prenant les logarithmes de ses deux membres,

$$\mathrm{l}.\frac{l+b}{l-b} = 2\alpha + \frac{a\varepsilon}{c}.$$

Connaissant α, l'équation $e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 2c'$ donnera c'; et enfin c_1 sera connu par l'équation

$$\frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right) + c_1 = 0.$$

143. Les constantes étant déterminées, il est facile de connaître les coordonnées du point le plus bas. En effet, pour ce point on a

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\varepsilon x}{c} + \alpha = -\frac{\varepsilon x}{c} - \alpha,$$

d'où

$$\frac{\varepsilon x}{c} + \alpha = 0, \quad \text{et} \quad x = -\frac{c\alpha}{\varepsilon}.$$

Si l'on prend pour axe des y la verticale qui passe par ce point, il suffira de changer x en $x - \frac{c\alpha}{\varepsilon}$, et l'équation (2) deviendra

$$y = \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{\varepsilon x}{c}} + e^{-\frac{\varepsilon x}{c}}\right) + c_1.$$

Le second membre ne changeant pas, quelque signe que l'on donne à x, il s'ensuit que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, c'est-à-dire à la verticale qui passe par le point le plus bas.

Si l'on change y en $y + c_1$, c'est-à-dire si l'on prend pour origine le point de cette verticale qui est au-dessous du point B′ de la quantité $-c_1$, et que l'on pose $\frac{c}{\varepsilon} = m$, l'équation de la courbe prend la forme plus simple,

$$(5) \qquad y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

Si les deux points B′, B sont à la même hauteur, on a

$$b = 0,$$

et, par suite,

$$2\alpha + \frac{a}{m} = 0;$$

l'abscisse $-m\alpha$ du point le plus bas est donc égale à $\frac{a}{2}$, comme cela était évident à priori. L'équation qui détermine z devient $\frac{e^z - e^{-z}}{z} = \frac{2l}{a}$, et celle de la courbe ne diffère pas de l'équation (5). La valeur de α étant $-\frac{a}{2m}$, est égale à $-z$; et la constante $c' = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$ sera égale à $\frac{-zl}{a}$.

144. La chaînette jouit de la propriété remarquable, que son centre de gravité est situé plus bas que pour toute autre courbe isopérimètre, ayant les mêmes extrémités.

En effet, l'ordonnée du centre de gravité du périmètre de l'une quelconque de ces courbes est

$$\frac{1}{l}\int y\,dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

et l'on doit avoir

$$\int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = l,$$

les limites de ces intégrales étant les abscisses des deux points de suspension. Or, la recherche du minimum de la première intégrale, en ayant égard à la condition exprimée par cette équation, conduit à l'équation d'une chaînette, comme on l'a vu dans le calcul des variations.

145. Nous allons démontrer maintenant quelques propriétés géométriques de la chaînette. L'équation

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

donne les suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2m}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right), \quad \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{m}\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{y}{m^2}.$$

Soient R le rayon de courbure, N la longueur de la normale, ω l'inclinaison de la tangente sur l'horizontale; on aura

$$y = \frac{m}{\cos\omega}, \quad R = \frac{y^2}{m} = m \operatorname{séc}^2\omega, \quad N = \frac{y^2}{m} = R.$$

On trouvera encore

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = m\frac{d^2y}{dx^2}dx.$$

d'où

$$s = m \frac{dy}{dx},$$

en prenant le point le plus bas pour origine des arcs. On déduit de là

$$\frac{s^2}{m^2} + 1 = \frac{dy^2}{dx^2} + 1 = \frac{y^2}{m^2};$$

donc

$$s^2 = y^2 - m^2,$$

m étant l'ordonnée à l'origine.

On obtient encore facilement les formules suivantes :

$$e^{\frac{x}{m}} = \frac{y+s}{m}, \quad e^{-\frac{x}{m}} = \frac{y-s}{m},$$

d'où l'on tire x en fonction de y et s, et par suite en fonction de s, puisqu'on a

$$y = \sqrt{s^2 + m^2}.$$

Si du pied P (*fig.* 33) de l'ordonnée d'un point quelconque M, on abaisse sur la tangente MQ une perpendiculaire PQ, on aura

$$PQ = y \cos \omega = m;$$

donc

$$MQ = \sqrt{y^2 - m^2} = s.$$

Ainsi le point Q appartient à la développante de la chaînette; QP est la tangente à cette courbe, et comme sa longueur est m et par conséquent constante, cette développante n'est autre chose que la courbe appelée *tractrice*.

Pour avoir son équation, il suffirait donc d'exprimer cette dernière condition, qui conduit entre les coordonnées u, v, à l'équation

$$\frac{du}{dv} - = \sqrt{\frac{m^2}{v^2} - 1}.$$

On y parviendrait encore par les formules qui déterminent les coordonnées du point Q de la développante d'une courbe quelconque, en exprimant que $MQ = s$; ces formules, qu'on obtient immédiatement, sont

$$u = x - s\frac{dx}{ds}, \quad v = y - s\frac{dy}{ds}.$$

En éliminant x, y, s au moyen des équations relatives à la chaînette, et qui donneront d'abord x et y en fonction de s, on trouvera l'équation finie de la tractrice. On la trouvera aussi en intégrant l'équation précédente, et l'on obtiendra

$$y = \frac{m^2}{v}, \quad x = u + \sqrt{m^2 - v^2},$$

$$u = -\sqrt{m^2 - v^2} + m\,\mathrm{l}.\left(\frac{m + \sqrt{m^2 - v^2}}{v}\right).$$

Il ne faut pas ajouter de constante, parce qu'on doit avoir à la fois $u = 0$, $v = m$. Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des y qu'elle touche en B (*fig.* 34), et a pour asymptote l'axe des x.

En remplaçant u et v par x, y, on a pour équation différentielle de la tractrice,

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y},$$

d'où

$$y\,dx = -dy\sqrt{m^2 - y^2},$$

et

$$\int_0^x y\,dx = -\int_m^y dy\sqrt{m^2 - y^2}.$$

Donc, si l'on décrit de A comme centre avec m pour rayon, un quart de cercle ABC, les aires BIN, BMPA seront équivalentes: et l'aire entière comprise entre la courbe et les

axes sera égale au quart de cercle, ou à $\frac{\pi m^2}{4}$. Si l'on cherche la valeur du rayon de courbure $OM = R$ et de la normale $MU = N$, on trouve

$$R = m\sqrt{\frac{m^2}{y^2} - 1}, \quad N = \frac{m}{\sqrt{\frac{m^2}{y^2} - 1}},$$

d'où

$$R.N = m^2,$$

et, par conséquent, O est sur la perpendiculaire à AX élevée par le pied T de la tangente.

Autre hypothèse sur la force.

146. Examinons maintenant la courbe que formerait le fil si la force verticale était proportionnelle à la projection horizontale de l'arc, et non à l'arc lui-même. Ce cas est, à peu de chose près, celui des ponts suspendus.

Soit ε la force rapportée à une projection horizontale égale à l'unité; $Y\,ds$ étant la composante verticale de la force appliquée à l'arc ds dont la projection est dx, on aura

$$Y\,ds = -\varepsilon\,dx;$$

et comme $X = 0$, les équations d'équilibre seront

$$d.\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad d.\left(T\frac{dy}{ds}\right) - \varepsilon\,dx = 0,$$

d'où

$$T\frac{dx}{ds} = c, \quad T\frac{dy}{ds} = \varepsilon x + cc', \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon}{c}x + c',$$

c et c' étant deux constantes arbitraires.

La première de ces équations montre encore que la composante horizontale de la tension est constante.

Intégrant la dernière, et prenant pour origine l'un des points fixes, on aura

$$y = \frac{\varepsilon}{2c} x^2 + c' x.$$

La courbe formée par le fil est donc une parabole dont l'axe est vertical. Les constantes c, c' se détermineront en exprimant que la courbe passe par le second point, et que sa longueur est égale à une ligne donnée.

Supposons, par exemple, que les deux points donnés soient sur une même horizontale; soient $2a$ leur distance, et l la longueur de la courbe.

L'équation de la courbe sera satisfaite par $y = 0$, $x = 2a$, ce qui donne

$$\frac{\varepsilon a}{c} + c' = 0, \quad \text{d'où} \quad c' = -\frac{\varepsilon a}{c},$$

et, en substituant,

$$y = \frac{\varepsilon}{2c}(x^2 - 2ax),$$

et changeant $x - a$ en x,

$$y = \frac{\varepsilon}{2c}(x^2 - a^2),$$

d'où

$$l = 2\frac{\varepsilon}{c}\int_0^a dx \sqrt{\frac{c^2}{\varepsilon^2} + x^2}$$
$$= a\sqrt{1 + \frac{a^2\varepsilon^2}{c^2}} + \frac{c}{\varepsilon}\,\mathrm{l}.\left(\frac{\varepsilon a}{c} + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 a^2}{c^2}}\right).$$

Cette équation déterminera c, et, par suite, c'; elle se résoudra par approximation, et le calcul sera très-simple dans le cas où la flèche de l'arc compris entre les deux points fixes sera très-petite par rapport à la corde $2a$. En effet,

$\frac{a\varepsilon}{c}$ sera très-petit, et l'on pourra développer en séries très-convergentes les différentes parties du second membre de l'équation. On aura ainsi

$$\sqrt{1+\frac{a^2\varepsilon^2}{c^2}} = 1 + \frac{a^2\varepsilon^2}{2c^2} + \ldots,$$

$$\frac{c}{\varepsilon}\,\mathrm{l}.\left(\frac{a\varepsilon}{c} + \sqrt{1+\frac{\varepsilon^2 a^2}{c^2}}\right) = a - \tfrac{1}{6}.\frac{a^3\varepsilon^2}{c^2} + \ldots,$$

$$l = 2a + \tfrac{1}{3}\frac{a^3\varepsilon^2}{c^2}; \quad \text{d'où} \quad c = \frac{\varepsilon a\sqrt{a}}{\sqrt{(3l-2a)}}.$$

147. Dans les ponts suspendus, les forces ne sont pas réparties sur toute l'étendue de la chaîne, mais sont appliquées à un nombre limité de points dont les projections horizontales sont équidistantes. On a alors un polygone dont les sommets jouissent de la propriété remarquable d'être situés sur une même parabole. En effet, désignons par α l'inclinaison d'un côté quelconque sur le plan horizontal, par m la tension horizontale; supposons qu'il y ait un côté horizontal, et prenons son milieu pour l'origine des coordonnées, et soit Δy la différence des ordonnées de deux sommets consécutifs correspondante à la différence constante Δx de leurs abscisses; nous aurons

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\varepsilon\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{a} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

d'où

$$\Delta y = \frac{\varepsilon}{a}\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x\right)\Delta x,$$

et, par suite,

$$y = \frac{\varepsilon x^2}{2a} + c.$$

Or, $x = \frac{\Delta x}{2}$ donne $y = 0$: donc

$$c = -\frac{\varepsilon \Delta x^2}{8a},$$

et, par conséquent,

$$y = \frac{\varepsilon}{2a}\left(x^2 - \frac{\Delta x^2}{4}\right),$$

équation d'une parabole dont le sommet est sur la verticale menée par le milieu du côté horizontal, et renferme tous les sommets du polygone situés de part et d'autre du côté horizontal. Il en serait de même s'il n'y avait pas de côté horizontal.

Autres exemples de systèmes flexibles en équilibre.

148. Cherchons encore la courbe formée par une voile flexible, soumise à l'action du vent. Nous supposerons que cette voile soit rectangulaire, que deux côtés opposés soient fixes et perpendiculaires à la direction du vent; et nous partirons de la loi suivante, que la pression d'un fluide en mouvement sur un élément fixe d'une surface est proportionnelle à l'étendue de sa surface, et au carré de la vitesse du fluide estimée dans le sens de la normale à cet élément.

D'après cela, si l'on fait une section dans la voile par un plan perpendiculaire aux côtés fixes, on aura une courbe dont on pourra considérer tous les éléments comme sollicités par des forces normales proportionnelles à leurs longueurs et aux carrés des cosinus des angles formés par la direction du vent avec la normale à la courbe. Donc, d'après les propositions démontrées nos 86 et 145, cette courbe sera une chaînette, pour laquelle la pesanteur agirait dans le sens même du vent.

Si, au lieu d'un courant d'air, on avait un gaz en équi-

libre, la pression serait normale, et égale pour des éléments égaux. Donc, d'après le n° 86, la courbe serait alors un arc de cercle.

CHAPITRE X.

DE LA FORCE DE FROTTEMENT.

149. Dans la recherche des conditions d'équilibre, nous avons toujours supposé que les courbes ou surfaces fixes ne pouvaient donner naissance qu'à des forces normales. Mais il n'en est pas ainsi dans la réalité; et l'expérience prouve que la résistance d'une surface ou d'une courbe peut détruire non-seulement des forces normales quelconques, mais encore des forces tangentielles comprises entre certaines limites. Ces dernières sont d'autant moindres que les surfaces en contact sont plus polies, et l'on peut supposer qu'elles n'existeraient pas si ces surfaces étaient entièrement dépourvues d'aspérités, comme nous les avons supposées dans tout ce qui précède.

Les circonstances dans lesquelles nous nous placions se rapportent donc en quelque sorte à un cas limite qui ne se rencontre jamais rigoureusement dans la nature; et il est nécessaire, pour les applications pratiques, d'étudier les modifications qu'apporte aux conditions d'équilibre l'introduction de ces nouvelles forces, que nous désignerons sous le nom de forces de *frottement*.

Les lois que suivent ces forces ne peuvent être déduites que de l'expérience, et nous allons faire connaître les résultats généraux auxquels elle a conduit.

Lorsqu'un corps en contact avec un plan par tous les points d'une face plane est pressé contre ce plan par une certaine force, on ne peut le mettre en mouvement par le moyen d'une force située dans le plan, que lorsqu'elle

dépasse une certaine limite. Cette limite, qui n'atteint sa plus grande valeur que quand le contact a duré un certain temps, est la mesure de la force de frottement que peut produire la pression du corps contre le plan. Mais cette force ne se développe que lorsque l'on sollicite le corps par une force qui a une composante située dans le plan de contact, et elle est égale et opposée à cette dernière, tant que le corps ne se met pas en mouvement. Elle peut donc varier arbitrairement quant à sa direction et son intensité; elle n'est assujettie qu'à être située dans le plan de contact, et à ne pas dépasser la limite dont il a été question tout à l'heure et qui doit être le seul objet de nos recherches. Ajoutons qu'elle se rapporte au cas où l'on fait prendre à tous les points du corps un mouvement parallèle et égal.

Le frottement d'un corps peut détruire non-seulement une force unique, mais un nombre quelconque de forces réductibles ou non à une seule; les forces qu'il représente sont donc dépendantes de celles que l'on fait agir dans le plan de contact.

Cela posé, nous ne nous occuperons que de la détermination de la force maximum que le frottement peut détruire, et que nous prendrons pour mesure du frottement lui-même.

Or, l'expérience a démontré que

1°. La force de frottement varie proportionnellement à la pression, toutes les autres circonstances restant les mêmes;

2°. Elle ne dépend pas de l'étendue de la surface en contact, pourvu qu'elle ne renferme pas de pointes ou d'arêtes, mais seulement de la nature et du poli des deux surfaces;

3°. Lorsque l'un de ces corps glisse sur l'autre, la force du frottement est indépendante de la nature du mouvement; elle est déterminée en grandeur par la pression et

la nature des surfaces, et sa direction est, pour chacun des deux corps, en sens contraire de sa vitesse relative.

On conçoit facilement comment les deux premières lois ont pu être reconnues. En posant un corps sur un plan horizontal et le tirant par un cordon horizontal passant sur une poulie de renvoi, et à l'extrémité duquel on appliquait des poids connus, on a pu déterminer avec précision le poids le plus faible qui met le corps en mouvement, et qui mesurera la force de frottement. En chargeant le corps de divers poids, on a déterminé les nouvelles valeurs de ceux qui déterminent le mouvement, et l'on a reconnu que leurs rapports à ceux qui mesurent la pression étaient toujours les mêmes.

En diminuant la surface en contact, ou en posant le corps sur les différentes faces également polies, on a encore reconnu que le rapport du frottement à la pression était le même. Ces expériences, répétées un grand nombre de fois, et sur des corps très-variés, ont toujours conduit aux mêmes conséquences.

Ce rapport du frottement à la pression, qui ne varie qu'avec la nature des substances, est désigné sous le nom de *coefficient du frottement*.

Quant à la troisième loi, elle a été démontrée par des expériences dont l'interprétation exige quelques notions de dynamique. Ces détails trouveront mieux leur place dans un cours de machines, et nous nous bornerons à l'énoncé de cette loi.

150. *Angle du frottement.* — Si un corps soumis à la seule action de la pesanteur repose sur un plan horizontal par une face plane, et qu'on fasse tourner ce plan autour d'une droite horizontale, le corps commencera à glisser quand l'inclinaison du plan aura atteint une certaine valeur, qu'il est facile de déterminer.

Soient, en effet, P le poids du corps et α l'inclinaison du

plan mobile sur le plan horizontal; la pression du corps sur le plan ou la composante de son poids perpendiculairement à ce plan sera $P \cos \alpha$; et la composante parallèle aura pour valeur $P \sin \alpha$.

Lorsque l'inclinaison variable α aura atteint la valeur particulière μ pour laquelle le corps commence à glisser, la force de frottement sera précisément égale à la composante parallèle au plan incliné; et si l'on désigne par f le rapport du frottement à la pression, on aura

$$f = \frac{p \sin \mu}{p \cos \mu} = \tan \mu.$$

Ainsi tous les corps de même nature et également polis, et généralement tous ceux qui auront le même coefficient de frottement relativement au plan mobile, commenceront à glisser sous un même angle dont la tangente trigonométrique est égale au coefficient du frottement, et que l'on désigne sous le nom d'*angle du frottement*.

Cette expérience peut aussi servir à démontrer les deux premières lois du frottement. En plaçant sur un plan, mobile autour d'une horizontale, un corps dont les différentes faces planes sont également polies, on reconnaît qu'il commence à glisser pour une même inclinaison du plan, quelle que soit l'aire de la face de contact, et quel que soit le poids dont on surcharge le corps. On conclut de là que, lorsque la nature et le poli des surfaces ne changent pas, la force de frottement est proportionnelle à la pression et indépendante de l'étendue de la face de contact. L'angle sous lequel le glissement commence, détermine le coefficient du frottement, qui en est la tangente trigonométrique.

151. *Équilibre d'un corps pressé contre un plan par une force oblique.* — Soient P (*fig.* 35) une force appliquée à un corps M, A le point où sa direction rencontre la face de contact, et θ l'angle qu'elle fait avec la nor-

male AN. La pression du corps contre le plan sera P cos θ; le frottement sera exprimé par f P cos θ, f étant le coefficient du frottement; et la force dans le plan fixe, qui tend à mettre le corps en mouvement, est égale à P sin θ. Il y aura donc équilibre si l'on a

$$P \sin \theta < f P \cos \theta,$$

ou

$$\tang \theta < f.$$

Ainsi, l'équilibre aura lieu, quelle que soit la force P, pourvu qu'elle fasse avec la normale un angle qui ne soit pas supérieur à l'angle du frottement.

Au reste, le cas que nous venons d'examiner ne diffère du précédent qu'en ce que la force P est de direction et de grandeur quelconque, au lieu d'être le poids même du corps.

152. *Équilibre du levier en ayant égard au frottement.* — Considérons un levier posé sur un autre corps, de sorte que le point d'appui ne soit pas lié invariablement avec lui, et supposons-le sollicité par deux forces. Elles peuvent d'abord être remplacées par des forces égales et parallèles appliquées au levier au point d'appui, et, de plus, à deux couples. S'il n'y avait pas de frottement, il faudrait que les couples se détruisissent et que la résultante des deux forces transportées au point d'appui fût normale à la surface résistante. Mais, s'il peut exister un frottement entre les deux corps, il se composera avec les deux forces appliquées comme lui au levier en son point de contact; il faudra donc encore que les deux couples se détruisent. Mais il ne sera plus nécessaire que les forces transportées au point d'appui donnent une résultante normale à la surface; il suffira que cette résultante fasse avec la normale un angle inférieur ou égal à l'angle du frottement.

153. *Équilibre d'un corps qui peut tourner autour d'un*

axe fixe. — Considérons maintenant un corps solide percé d'un trou cylindrique, au travers duquel passe un cylindre fixe d'un diamètre à peu près égal. Supposons ce corps sollicité par deux forces situées dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, et cherchons les conditions d'équilibre, en ayant égard à la force de frottement. Concevons que tout le système soit réduit à la section par ce plan perpendiculaire, ou, en d'autres termes, que le corps n'ait pas d'épaisseur sensible.

Soit C (*fig.* 36) le point de contact du cercle fixe ayant son centre en O, et du cercle mobile appartenant au corps. Il doit y avoir équilibre entre les deux forces données P, Q et la force de frottement F appliquée en C tangentiellement au cercle. Il est donc nécessaire et suffisant que les deux forces P, Q aient une résultante passant en C et faisant avec la normale un angle moindre que celui du frottement.

Ainsi, lorsque les forces données auront une résultante qui passera par un point quelconque C du cercle appartenant au corps, et fera avec sa normale un angle égal ou inférieur à celui du frottement, le corps sera en équilibre si l'on fait en sorte que le contact avec le cercle fixe ait lieu au point C.

En considérant le cas extrême où l'équilibre est au moment de se rompre, la résultante R des forces P et Q fait avec la normale au cercle un angle égal à l'angle du frottement; la pression normale exercée sur le cylindre fixe est la projection de la résultante R sur le rayon, ou $\frac{R}{\sqrt{1+f^2}}$; elle est donc toujours moindre que la résultante R. La force tangentielle appliquée au cylindre fixe s'obtiendra en multipliant la pression par le coefficient f, et sera, par conséquent, égale à $\frac{Rf}{\sqrt{1+f^2}}$. Leur résultante ne sera autre

chose que R, comme cela devait être évidemment, puisque la résultante R des forces données est détruite par la résistance du cylindre fixe.

154. *Équilibre d'un corps sur un plan incliné.* — Supposons un corps pesant posé sur un plan incliné à l'horizon, et sollicité par une force P comprise dans le plan vertical, passant par le centre de gravité du corps, et la normale au plan incliné. Réduisons tout le système à la section faite par ce plan, et cherchons la condition d'équilibre en tenant compte du frottement.

Soient IV (*fig.* 37) la verticale menée par le centre de gravité du corps, PI la direction de la force P, Q le poids du corps, et α l'inclinaison du plan LA sur le plan horizontal AB; il faut exprimer que leur résultante est détruite par la résistance normale du plan AL et par le frottement. En désignant par θ l'angle de la force P avec le plan incliné, la pression exercée sur ce dernier sera égale à

$$Q\cos\alpha - P\sin\theta,$$

θ étant considéré comme positif au-dessus de la direction AL, et comme négatif au-dessous. Si l'équilibre est au moment de se rompre, la force de frottement sera égale à

$$f(Q\cos\alpha - P\sin\theta);$$

mais, en général, elle en sera une fraction quelconque k. La composante totale dans le sens du plan sera

$$Q\sin\alpha - P\cos\theta;$$

et pour que l'équilibre ait lieu, il est nécessaire et suffisant que cette expression, positive ou négative, soit égale à la force de frottement; ce qui s'exprimera par l'équation suivante :

$$Q\sin\alpha - P\cos\theta = kf(Q\cos\alpha - P\sin\theta),$$

k étant compris entre -1 et $+1$, et devenant -1 ou $+1$ dans le cas où l'équilibre est sur le point de se rompre, soit dans un sens, soit dans l'autre.

On tire de cette équation

$$P = \frac{Q(\sin\alpha - kf\cos\alpha)}{\cos\theta - kf\sin\theta}.$$

Si $k = 0$ et $\theta = 0$, on retombe sur l'expression connue

$$P = Q\sin\alpha.$$

155. Cherchons la direction dans laquelle il faut faire agir la force P pour obtenir le plus d'avantage possible, en supposant le corps prêt à glisser; et, pour cela, cherchons la valeur de θ, qui, en supposant $k = 1$, donne le minimum de P ou le maximum du dénominateur. Les deux premières dérivées de ce dernier, par rapport à θ, ont pour expressions

$$-\sin\theta - f\cos\theta,$$

et

$$-\cos\theta + f\sin\theta.$$

En égalant la première à zéro, on trouve

$$\tang\theta = -f;$$

d'où il suit que la force P doit être dirigée en dessous du plan, et faire avec lui un angle égal à l'angle du frottement. La seconde dérivée se réduit alors à

$$-\cos\theta(1 + f^2);$$

elle est donc négative pour cette valeur de θ; d'où il suit que le dénominateur de P est maximum, et, par suite, P minimum.

On pourrait encore chercher l'inclinaison θ, qui donne la plus petite valeur de P, propre à faire remonter le corps.

Il faut alors supposer $k = -1$, et chercher le minimum de $\frac{1}{\cos\theta + f \sin\theta}$ ou le maximum de $\cos\theta + f\sin\theta$. On en tire

$$-\sin\theta + f\cos\theta = 0, \qquad \tang\theta = f;$$

ce qui montre que la force doit être dirigée au-dessus du plan incliné et faire avec lui un angle égal à l'angle du frottement, quelle que soit son inclinaison α.

Cet angle, qui est le plus favorable à la traction d'un corps pesant sur un plan quelconque, porte le nom d'*angle de traction*; et, comme nous venons de le prouver, il n'est autre que l'angle du frottement.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur la théorie du frottement. Nous n'avons voulu que donner une idée de la manière dont les forces de cette espèce modifient les conditions de l'équilibre; ce qui est de la plus haute importance dans les applications. Nous renvoyons, pour de plus grands détails, aux Traités spéciaux sur les machines.

CHAPITRE XI.

APPLICATION DE LA COMPOSITION DES FORCES A L'ATTRACTION MUTUELLE DES CORPS.

156. L'ensemble des phénomènes célestes nous conduira plus tard à admettre que les molécules des corps s'attirent proportionnellement à leurs masses, et en raison inverse du carré de leur distance. Il est donc convenable, pour préparer à l'étude des diverses questions relatives au système du monde, de calculer quelques effets de l'attraction des corps; et nous considérerons plus particulièrement ceux dont la forme se rapproche le plus de celle que nous présentent les corps célestes.

Nous allons nous proposer d'abord de calculer l'action mutuelle de deux sphères composées de couches concentriques homogènes, mais dont la nature peut dépendre de leur distance au centre. Nous supposons que tous les points de l'une attirent chacun des points de l'autre, de manière que l'action et la réaction soient égales; en sorte que, si l'on joignait deux points par une droite inflexible, l'action mutuelle de ces points ne produirait aucun mouvement. Cette action peut changer suivant une loi quelconque, avec la distance des deux points; nous supposerons ici qu'elle varie en raison inverse du carré de la distance.

Si nous concevons que toute la matière qui compose l'unité de masse, tant de l'une que de l'autre substance, soit réunie en un même point, sans rien perdre de son action, et que ces deux points soient placés à l'unité de distance l'un de l'autre, ils produiront l'un sur l'autre une force attractive égale, que nous désignerons par f, et qui est une des données nécessaires de la question. En la joignant avec l'hypothèse, que tous les points s'attirent mutuellement en raison directe des masses et en raison inverse du carré de la distance, la question est complétement déterminée.

Si l'on considère d'abord l'action mutuelle de deux éléments infiniment petits dm, dm', on peut considérer les distances de leurs différents points comme égales à l'une quelconque d'entre elles, que nous désignerons par u. Toutes les parties égales exerçant, par hypothèse, une même action sur un même point, à la même distance, la matière comprise dans la masse dm exercera sur dm' une action qui sera dans le rapport de $dm : 1$ avec celle qu'exercerait sur dm' la matière renfermée dans l'unité de masse, et concentrée au point où se trouve dm. Cette dernière action sera dans le rapport de $dm' : 1$ avec celle qui aurait lieu si, au lieu de dm', on substituait l'unité de masse concentrée au même point. Mais cette nouvelle action est à celle que

nous avons représentée par f, dans le rapport de $1 : u^2$. Donc, l'action des deux éléments dm, dm' sera exprimée par

$$\frac{f\,dm\,dm'}{u^2},$$

en négligeant la quantité infiniment petite d'un ordre supérieur, qui provient de la différence des valeurs de u, et qui ne changera pas les limites des sommes des éléments dans lesquels cette expression entrerait comme facteur.

Cela posé, considérons une couche sphérique d'une densité égale à ρ, d'une épaisseur infiniment petite, dont le centre est en O, et qui est comprise entre les surfaces sphériques dont les rayons sont r et $r+dr$; son action sur un élément dm' situé en A à une distance α de son centre sera dirigée suivant la droite AO, autour de laquelle tout est semblable, et il suffira de faire la somme des composantes de toutes les forces suivant cette direction, pour avoir la résultante cherchée.

Soit M un point quelconque de la circonférence dont le rayon est r; faisant

$$\text{MOA} = \theta, \quad \text{MON} = d\theta, \quad \text{MA} = u, \quad \text{OA} = \alpha;$$

d'où résulte

$$u^2 = \alpha^2 + r^2 - 2r\alpha\cos\theta.$$

Les deux rayons OM, ON (*fig.* 38) étant prolongés jusqu'à la circonférence dont le rayon est $r+dr$, la surface infiniment petite $rd\theta\,dr$ tournant autour de l'axe AO engendrera un volume $2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr$, dont la composante de l'action sur dm' suivant l'axe AO sera

$$\frac{\pi\rho f r^2\,dr\,dm'}{\alpha} \cdot \frac{\sin\theta\, d\theta}{u^3}\left(u^2+\alpha^2-r^2\right).$$

On aura donc l'attraction de la couche sphérique sur dm',

en faisant la somme des expressions semblables quand θ variera depuis o jusqu'à π, et, par suite, u depuis $\alpha - r$ jusqu'à $\alpha + r$, si le point est extérieur; et depuis $r - \alpha$ jusqu'à $r + \alpha$, s'il est intérieur.

Exprimons d'abord la différentielle en fonction de u seulement. On tire de l'équation entre x et θ,

$$u\,du = \alpha r \sin\theta\, d\theta.$$

L'expression ci-dessus devient donc

$$\frac{\pi\rho f r\,dr}{\alpha^2}\, dm' \left(\frac{u^2 + \alpha^2 - r^2}{u^2}\right) du,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{\pi\rho f r\,dr}{\alpha^2}\, dm' \left(u + \frac{r^2 - \alpha^2}{u}\right) + \mathrm{C}.$$

Si le point est extérieur, cette intégrale prise entre les limites $\alpha - r$ et $\alpha + r$ a pour valeur

$$\frac{4\pi\rho f r^2\, dr\, dm'}{\alpha^2}:$$

on voit qu'elle est la même que si toute la matière était réunie au centre.

Pour avoir l'attraction exercée par un solide composé de couches sphériques homogènes, mais dont la nature peut varier avec r d'une manière arbitraire, il faudrait faire la somme des actions de toutes ces couches, et comme elles sont toutes les mêmes que si l'on réunissait ces diverses couches au centre, on obtient la proposition suivante :

Un solide composé de couches sphériques homogènes, de nature différente, et dont tous les points attirent un point extérieur en raison inverse du carré des distances, exerce sur ce point la même action que si toute la matière qui le compose était réunie en son centre.

Dans le cas d'une sphère homogène, de rayon R, l'expression de cette action sera $\frac{4}{3}\frac{\pi \rho f R^3 dm'}{\alpha^2}$.

Si le point A était intérieur à la couche infiniment mince que nous avons considérée, les limites de u seraient $r-\alpha$ et $r+\alpha$, et la somme se réduirait à zéro. D'où résulte cette autre proposition :

Dans la même loi d'attraction, l'action du même solide est nulle sur tout point situé en dedans de la surface intérieure. Et pour un point situé dans l'intérieur de sa masse, l'action se réduit à celle du solide compris entre la surface intérieure et celle de la surface sphérique concentrique qui passe par ce point.

Il résulte de là que l'action d'une sphère entière sur un point de son intérieur est bornée à l'action de la sphère concentrique dont la surface passe par ce point.

Dans le cas où toutes les couches sont de même nature, si R désigne le rayon de la sphère et r la distance du point que l'on considère au centre, l'action de la sphère sera

$$\tfrac{4}{3}\pi \rho f r\, dm';$$

elle ne dépend plus de R, et est proportionnelle à la distance au centre.

157. Rien n'est plus facile maintenant que de calculer l'action mutuelle de deux sphères extérieures l'une à l'autre. D'abord, l'action de l'élément dm' sur la première sphère étant égale et contraire à celle de cette sphère sur dm', puisque toutes les actions élémentaires qui les composent l'une et l'autre sont égales et contraires par hypothèse, il s'ensuit que la résultante des actions de la première sphère sur tous les éléments dm' qui composent la seconde, sera égale et contraire à la résultante de toutes les actions des éléments de la seconde sur la première ; c'est-à-dire que les

actions des deux sphères l'une sur l'autre sont égales et contraires.

Or, d'après ce qui précède, l'action de dm' sur la première sphère est la même que si toute la matière qui la compose était réunie en son centre. La question revient donc à calculer l'action de la seconde sphère sur ce point; mais il est prouvé qu'elle est la même que si toute la matière de la seconde était réunie en son centre; d'où l'on conclut que

Deux sphères composées de couches homogènes quelconques, dont tous les points s'attirent proportionnellement aux masses et en raison inverse du carré de la distance, exercent l'une sur l'autre la même action que si la matière dont chacune d'elles est composée était réunie en son centre.

La même proposition a évidemment lieu pour deux sphères creuses composées de même de couches homogènes.

158. On peut démontrer très-simplement que les actions exercées par tous les points d'une couche sphérique homogène et infiniment peu épaisse, sur un point de l'intérieur, se détruisent.

En effet, soient O (*fig.* 39) le centre de la surface intérieure de la couche, OB son rayon, et A le point intérieur que l'on considère. Menons par OA un plan quelconque, et soient M et N deux points infiniment voisins pris sur la circonférence suivant laquelle il coupe la sphère; tirons les droites MAM', NAN', MN, M'N': les triangles AMN, AM'N' seront semblables. Si, maintenant, on fait tourner le plan autour de OB, les cordes ou les arcs MN, M'N' engendreront des surfaces qui, multipliées par l'épaisseur infiniment petite de la couche, seront des éléments de son volume; or les actions de ces deux éléments sont égales et contraires, car elles sont proportionnelles aux surfaces engendrées par MN et M'N', et en raison inverse des carrés des distances: il suffit donc de prouver que ces surfaces sont

en raison directe de $\overline{AM}^2$, $\overline{AM'}^2$, ce qu'on reconnaît facilement en observant qu'elles sont proportionnelles aux produits des arcs générateurs par leurs distances à l'axe, et que ces produits sont dans le rapport de $\overline{AM}^2 : \overline{AM'}^2$, à cause de la similitude des triangles.

159. *Autre loi d'attraction.* — Si l'on suppose l'action de deux points proportionuelle à leur distance, on peut facilement calculer l'attraction d'un corps de figure quelconque sur un point placé arbitrairement.

Prenons, pour cela, trois axes rectangulaires se coupant au centre de gravité du corps attirant, et faisons passer l'axe des x par le point attiré. Soient x, y, z les coordonnées d'une molécule quelconque dm du corps, α la distance de la molécule attirée dm' à l'origine; les trois composantes de l'attraction de dm seront

$$f(x-\alpha)\,dm\,dm', \qquad fy\,dm\,dm', \qquad fz\,dm\,dm'.$$

Si l'on fait la somme de ces valeurs élémentaires, en prenant pour dm successivement tous les éléments du corps, et que l'on observe que, d'après les propriétés du centre de gravité, on a

$$\Sigma x\,dm = 0, \qquad \Sigma y\,dm = 0, \qquad \Sigma z\,dm = 0,$$

on trouvera que les composantes de l'attraction totale, parallèles aux axes des z et des y, sont nulles; et que la troisième, qui est la résultante, a pour valeur $-f\mathrm{M}\alpha\,dm'$, M désignant la masse totale du corps, ou du système quelconque de points attirants. D'où l'on conclut que, dans la loi supposée, *l'attraction d'un système quelconque de points sur un point situé d'une manière quelconque, est la même que si toute la masse attirante était réunie en son centre de gravité.*

Si maintenent on considère l'action mutuelle de deux

corps quelconques, un raisonnement analogue à celui qui a été fait précédemment pour deux sphères démontrera qu'elle est la même que si la masse de chacun des corps était réunie en son centre de gravité.

Calcul de l'attraction d'un corps quelconque sur un point matériel.

160. Nous allons maintenant envisager la question d'une manière plus générale et supposer l'attraction de deux éléments proportionnelle à leur masse, et à une fonction quelconque de leur distance r. Considérons un corps de figure quelconque dont la densité, variable d'un point à un autre, soit représentée par ρ, et cherchons les trois composantes de son action sur un point matériel dont la masse est μ, et dont les coordonnées sont α, β, γ. L'élément de volume $dx\,dy\,dz$ du corps aura pour masse $\rho\,dx\,dy\,dz$, et son action sur μ sera exprimée par $\mu\rho\,dx\,dy\,dz\,\mathrm{F}(r)$, si l'on désigne par $\mathrm{F}(r)$ l'action mutuelle de deux unités de masse à une distance r l'une de l'autre. Les composantes X, Y, Z de l'attraction du corps entier parallèlement aux axes de coordonnées seront

$$\mathrm{X} = \mu \int\int\int \rho \left(\frac{x-\alpha}{r}\right) \mathrm{F}(r)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\mathrm{Y} = \mu \int\int\int \rho \left(\frac{y-\beta}{r}\right) \mathrm{F}(r)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\mathrm{Z} = \mu \int\int\int \rho \left(\frac{z-\gamma}{r}\right) \mathrm{F}(r)\,dx\,dy\,dz,$$

et l'on aura

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = r.$$

Il suffirait de les changer de signe pour passer au cas de la répulsion.

Ces intégrales, qui s'étendent à la masse entière du corps, peuvent se réduire à une seule. En effet, en différentiant partiellement r par rapport à α, 6, γ, on obtient

$$\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{(x-\alpha)}{r}, \quad \frac{dr}{d6} = -\frac{(y-6)}{r}, \quad \frac{dr}{d\gamma} = -\frac{(z-\gamma)}{r}.$$

Soit maintenant $\varphi(r)$ la fonction dont la dérivée, par rapport à r, est $F(r)$; posons

$$\int\int\int \rho\varphi(r)\,dx\,dy\,dz = U,$$

et différentions les deux membres de cette équation par rapport à α, 6, γ; il suffira de différentier sous le signe $\int$, si $\varphi(r)$ ne passe pas par l'infini, et l'on trouvera ainsi les formules suivantes:

$$X = -\mu\frac{dU}{d\alpha}, \quad Y = -\mu\frac{dU}{d6}, \quad Z = -\mu\frac{dU}{d\gamma}.$$

Tout dépend donc de la seule intégrale U.

Il est bon de remarquer que si, dans le cas, par exemple, d'un solide indéfini, l'intégrale U prenait une valeur infinie, mais que les dérivées partielles désignées par $\frac{dU}{d\alpha}$, $\frac{dU}{d6}$, $\frac{dU}{d\gamma}$ fussent finies, les valeurs précédentes de X, Y, Z n'en seraient pas moins exactes. En effet, prenons d'abord une portion finie du solide; les composantes de son attraction auront pour valeurs les produits de $-\mu$ par les dérivées partielles de la fonction finie U. Supposons maintenant que l'on étende infiniment la partie considérée du solide, les composantes de l'action seront toujours

$$-\mu\frac{dU}{d\alpha}, \quad -\mu\frac{dU}{d6}, \quad -\mu\frac{dU}{d\gamma},$$

que U croisse ou non sans limite. Donc, si ces trois expressions ont des limites, ce sont les composantes de l'at-

traction du solide indéfini. Et, si elles croissent indéfiniment, on en conclura que l'attraction croît sans limite à mesure que l'on considère une plus grande partie du corps; c'est ce que l'on exprime en disant que l'attraction du solide est infinie.

Ainsi, il suffira toujours de connaître les dérivées qui entrent dans l'expression des composantes X, Y, Z sans s'inquiéter si la fonction U elle-même est finie ou infinie. On raisonnerait d'une manière analogue si U était infini, sans que le solide le fût.

161. Dans le cas où l'attraction est en raison inverse du carré de la distance,

$$F(r) = \frac{f}{r^2}, \quad \varphi(r) = -\frac{f}{r};$$

et faisant, dans ce cas,

$$\int\int\int \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r} = V,$$

on aura

$$X = \mu f \frac{dV}{d\alpha}, \quad Y = \mu f \frac{dV}{d\beta}, \quad Z = \mu f \frac{dV}{d\gamma}.$$

Si le point attiré fait partie du corps, la fonction $\varphi(r)$ passe par l'infini; mais ces formules subsistent toujours. En effet, elles n'offrent aucune difficulté, si on les applique à tout le corps, moins une sphère infiniment petite qui renferme le point attiré. Or V a une limite, quand cette sphère tend vers zéro; car l'élément de volume exprimé en coordonnées polaires ayant pour origine le point attiré a pour expression $r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\psi$; or, si l'on divise par r et qu'on intègre dans l'étendue de la sphère de rayon infiniment petit, on aura une quantité infiniment petite du second ordre. Il suit de là que la fonction V étendue au corps entier est finie, et, par suite, ses dérivées par rapport

aux indéterminées α, β, γ, le sont aussi. On voit de même que X, Y, Z ont aussi des limites; d'ailleurs, quand les deux membres d'une équation ont des limites, ces limites sont égales : donc les formules qui donnent X, Y, Z sont encore exactes quand on considère le corps entier dont le point fait partie.

162. L'attraction sur le point α, β, γ, estimée suivant la direction du vecteur r mené de l'origine à ce point, a pour expression

$$X\frac{\alpha}{r}+Y\frac{\beta}{r}+Z\frac{\gamma}{r}=-\mu\left(\frac{dU}{d\alpha}\frac{\alpha}{r}+\frac{dU}{d\beta}\frac{\beta}{r}+\frac{dU}{d\gamma}\frac{\gamma}{r}\right).$$

Mais en considérant U comme fonction de α, β, γ, et ces coordonnées comme fonction de r et de deux angles θ, ψ, on a

$$\frac{dU}{dr}=\frac{dU}{d\alpha}\frac{\alpha}{r}+\frac{dU}{d\beta}\frac{\beta}{r}+\frac{dU}{d\gamma}\frac{\gamma}{r},$$

en observant que les dérivées partielles de α, β, γ par rapport à r sont respectivement $\frac{\alpha}{r}$, $\frac{\beta}{r}$, $\frac{\gamma}{r}$.

Donc la composante de l'attraction suivant le rayon vecteur est $-\mu\frac{dU}{dr}$, les deux autres composantes étant supposées dans le plan perpendiculaire à ce rayon. Dans le cas de $F(r)=\frac{f}{r^2}$, cette expression devient $\mu f\frac{dV}{dr}$.

163. Pour donner une application de ces formules dans le cas de $F(r)=\frac{f}{r^2}$, considérons une sphère creuse pour laquelle ρ soit une fonction quelconque de la distance au centre. Prenons pour axe des x la droite qui joint le centre au point attiré, et qui est évidemment la direction de la résultante des attractions. Désignons par a et A les rayons des deux surfaces qui terminent le solide, par u le rayon

intérieur d'une couche sphérique ayant pour épaisseur du, et par θ l'angle d'un rayon quelconque avec l'axe des x.

La valeur de V aura pour expression

$$V = 2\pi \int\int \frac{\rho u^2 du \sin\theta d\theta}{r}.$$

L'intégration par rapport à θ étant effectuée entre o et π, donnera la partie de V correspondante à la couche dont l'épaisseur est du; en intégrant ensuite le résultat par rapport à u entre les limites a et A, on aura la valeur totale de V. Or on a

$$r^2 = u^2 - 2\alpha u \cos\theta + \alpha^2;$$

d'où, en observant que u est constant,

$$r dr = \alpha u \sin\theta d\theta,$$

et, par suite,

$$V = \frac{2\pi}{\alpha} \int\int \rho u du dr.$$

Quant aux limites de r correspondantes à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, il faut distinguer le cas où le point attiré est extérieur au solide, de celui où il est intérieur.

1°. Si le point attiré est extérieur au solide, on aura $\alpha > A$, et, par conséquent, $\alpha > u$ pour toutes les couches que l'on a à considérer. On a alors

$$\int dr = 2u \quad \text{et} \quad V = \frac{4\pi}{\alpha} \int_a^A \rho u^2 du.$$

Si l'on désigne par M la masse du corps, on aura

$$4\pi \int_a^A \rho u^2 du = M;$$

d'où

$$V = \frac{M}{\alpha} \quad \text{et} \quad X = -\frac{\mu f M}{\alpha^2}.$$

L'attraction est donc la même que si toute la matière du corps était réunie à son centre.

2°. Si le point attiré est dans l'intérieur de la plus petite surface, on a $\alpha < a$, et, par conséquent, $\alpha < u$ dans toute l'étendue des valeurs de u. On a donc alors

$$\int dr = 2\alpha \quad \text{et} \quad V = 4\pi \int \rho u \, du.$$

Cette quantité étant indépendante de α, on aura

$$\frac{dV}{da} = 0, \quad \text{et, par suite,} \quad X = 0.$$

On voit donc que, *dans cette même loi d'attraction, le solide n'exercera aucune attraction sur un point situé dans l'intérieur de sa plus petite surface.*

On conclut de là que l'action sur un point qui ferait partie du même solide se réduirait à celle qu'exercerait la partie comprise entre la sphère de rayon a et celle qui passerait par le point attiré. Il faudrait donc supposer la matière qui compose cette partie, réunie au centre, et agissant sur le point, suivant la loi donnée.

S'il s'agit, par exemple, de l'action d'une sphère pleine, homogène, sur un point de son intérieur, situé à une distance α du centre, on devra prendre $M = \frac{4}{3}\pi\rho\alpha^3$; et l'attraction a pour valeur $\frac{4}{3}\pi\rho f \mu . \alpha$. *Elle est donc directement proportionnelle à la distance au centre.*

164. *Action d'un corps quelconque sur un point très-éloigné.* — Si l'on considère l'action d'un corps de forme et de densité quelconques, sur un point dont les distances à tous les points de ce corps soient très-grandes par rapport à ses dimensions, on arrive à un résultat remarquable que nous allons faire connaître.

Supposons l'attraction en raison inverse du carré de la distance, et calculons la fonction V. Pour cela, prenons le

centre de gravité du corps pour origine, et faisons d'abord passer l'axe des x par le point attiré.

Soient δ la distance de ces deux points, u le rayon vecteur d'un point quelconque du corps, dm sa masse, x son abscisse, μ la masse du point attiré; la distance de ce dernier point à un point quelconque du corps sera

$$\sqrt{\delta^2 - 2\delta x + u^2},$$

et l'on aura par conséquent

$$V = \Sigma\, dm\,(\delta^2 - 2\delta x + u^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\delta}\,\Sigma\, dm\left(1 - \frac{2x}{\delta} + \frac{u^2}{\delta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on développe la puissance du trinôme, soit par la formule de Lagrange, soit par celle du binôme, on aura une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{u}{\delta}$, et d'autant plus convergente que $\frac{u}{\delta}$ sera plus petit, et l'on trouvera ainsi, en représentant par M la masse totale des corps attirants, en observant que $\Sigma x\, dm$ est nul, puisque l'origine est le centre de gravité du système,

$$V = \frac{M}{\delta} + \frac{1}{2\delta^3}\,\Sigma\,(3x^2 - u^2)\,dm + \ldots.$$

On peut donc se borner à prendre $V = \frac{M}{\delta}$ en négligeant $\frac{1}{\delta^3}$ par rapport à $\frac{1}{\delta}$. En considérant maintenant un système quelconque d'axes passant toujours par le centre de gravité, et désignant par α, β, γ les coordonnées du point attiré, on aura

$$V = M\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Les trois composantes de l'attraction seront donc respecti-

vement

$$-\frac{\mu f M \alpha}{\delta^3}, \quad -\frac{\mu f M \beta}{\delta^3}, \quad -\frac{\mu f M \gamma}{\delta^3},$$

d'où l'on voit que leur résultante passe par l'origine qui est le centre de gravité de la masse attirante, et qu'elle a la même valeur que si toute la masse était réunie en ce point. Ce résultat, qui n'est qu'approché pour un corps quelconque, est tout à fait exact dans le cas de la sphère, quelle que soit la distance du point attiré, pourvu qu'il soit en dehors de la sphère. Dans ce cas, l'intégration ferait disparaître tous les termes, excepté le premier de la série.

Le calcul précédent a été fait d'après une loi particulière : on verra facilement que le résultat serait le même dans le cas où l'attraction varierait en raison inverse de toute autre puissance de la distance, et même suivant des lois plus compliquées.

Action d'une couche elliptique sur un point intérieur.

165. La proposition que nous avons démontrée relativement à l'action d'une couche sphérique sur un point intérieur, peut se démontrer géométriquement dans le cas plus général du solide compris entre deux ellipsoïdes semblables ayant leurs axes coïncidents.

En effet, supposons d'abord le solide homogène; soient M (*fig.* 40) le point attiré, et μ sa masse. Considérons-le comme sommet d'une infinité d'angles solides qui composent tout l'espace autour de lui, et cherchons la résultante de l'action des deux parties comprises dans un quelconque de ces angles et son opposé au sommet. Soit DCAB une des arêtes de cet angle ; on aura AB = CD par la similitude des deux ellipsoïdes. Si nous désignons par ω la mesure de l'angle solide, nous pourrons décomposer le

solide AB en éléments dont les épaisseurs PQ formeront la droite AB, et dont l'expression sera $\omega r^2 dr$; multipliant par $\frac{\rho f \mu}{r^2}$, on aura l'attraction que cet élément exerce sur le point M; on trouve ainsi $\rho f \mu \omega dr$, et la somme $\rho f \mu \omega . AB$ exprimera l'attraction de la matière contenue dans AB. On trouvera de même $\rho f \mu \omega . CD$ pour l'attraction de la matière contenue dans la partie CD; et comme les droites AB et CD sont égales, ces attractions seront égales, et, par conséquent, se détruiront. Donc, comme il en sera ainsi pour tous les angles solides autour de M, *le solide homogène compris entre deux ellipsoïdes semblables quelconques n'exerce aucune attraction sur un point situé dans l'intérieur de sa plus petite surface.*

Cette proposition, étant indépendante de l'épaisseur, a lieu aussi pour une couche infiniment mince. Donc *elle est encore vraie pour un solide d'une épaisseur quelconque composé de couches homogènes comprises entre des ellipsoïdes semblables, et dont la nature varie d'une manière quelconque de l'une à l'autre.*

166. *Surfaces de niveau.* — On appelle ainsi celles sur lesquelles un point matériel posé resterait en équilibre sous l'influence des forces du système.

Considérons donc un corps quelconque qui attire un point suivant une loi quelconque; on aura, d'après ce qui précède,

$$X = -\mu \frac{dU}{d\alpha}, \quad Y = -\mu \frac{dU}{d\beta}, \quad Z = -\mu \frac{dU}{d\gamma};$$

pour que la résultante soit perpendiculaire à la surface sur laquelle le point peut se mouvoir, il faut qu'on ait pour tous les déplacements sur cette surface,

$$X d\alpha + Y d\beta + Z d\gamma = 0.$$

ou

$$\frac{dU}{d\alpha}d\alpha + \frac{dU}{d\beta}d\beta + \frac{dU}{d\gamma}d\gamma = 0,$$

ce qui prouve que U est constant. L'équation des surfaces de niveau relatives à l'attraction ou à la répulsion du corps est donc

$$U = c,$$

c désignant une constante arbitraire.

Quand l'attraction est en raison inverse du carré de la distance, cette équation devient $V = c$.

167. La fonction V jouit d'une propriété remarquable, qui est d'une grande utilité pour la détermination de sa valeur.

D'après la valeur de r, on a

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\alpha} = \frac{x-\alpha}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r}}{d\beta} = \frac{y-\beta}{r^3}, \quad \frac{d\frac{1}{r}}{d\gamma} = \frac{z-\gamma}{r^3},$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\alpha^2} = \frac{3(x-\alpha)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \quad \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\beta^2} = \frac{3(y-\beta)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\gamma^2} = \frac{3(z-\gamma)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3};$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\alpha^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\beta^2} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\gamma^2} = 0.$$

Mais, puisque l'on a $V = \int\int\int \frac{\rho\, dv}{r}$, dv étant l'élément de volume, et que, pour différentier une intégrale par rapport à des quantités considérées comme constantes dans

l'intégration, et qui n'entrent pas dans les limites de cette intégrale, il suffit de différentier sous le signe $\int$, on aura

$$\frac{d^2 V}{d\alpha^2} = \int\int\int \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\alpha^2} \rho\, dv, \qquad \frac{d^2 V}{d\beta^2} = \int\int\int \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\beta^2} \rho\, dv,$$

$$\frac{d^2 V}{d\gamma^2} = \int\int\int \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\gamma^2} \rho\, dv,$$

pourvu, toutefois, que la fonction $\frac{1}{r}$ ne devienne infinie pour aucune valeur comprise dans les limites de l'intégration; car on sait que, dans ce cas, la différentiation sous le signe $\int$ peut donner des résultats inexacts.

Donc, si le point α, β, γ ne fait pas partie du corps attirant, on aura

$$(1) \qquad \frac{d^2 V}{d\alpha^2} + \frac{d^2 V}{d\beta^2} + \frac{d^2 V}{d\gamma^2} = 0.$$

Si le point fait partie du corps, on concevra une sphère infiniment petite dans l'intérieur de laquelle il sera compris; la fonction V, considérée pour tout le reste du corps, satisfera à l'équation ci-dessus.

Soit ρ la densité du corps au point attiré, ce sera aussi celle de la petite sphère. Les composantes de l'attraction de la sphère sur ce point, qui est dans son intérieur, seront donc respectivement

$$-\frac{4}{3}\pi\mu f\rho(\alpha - a), \quad -\frac{4}{3}\pi\mu f\rho(\beta - b), \quad -\frac{4}{3}\pi\mu f\rho(\gamma - c),$$

a, b, c étant les coordonnées du centre de la petite sphère; on aura donc, en appelant V' la partie de V qui se rapporte

à cette sphère,

$$\frac{dV'}{d\alpha} = -\frac{4}{3}\pi\rho(\alpha - a), \quad \frac{dV'}{d\beta} = -\frac{4}{3}\pi\rho(\beta - b),$$

$$\frac{dV'}{d\gamma} = -\frac{4}{3}\pi\rho(\gamma - c);$$

d'où

$$\frac{d^2V'}{d\alpha^2} + \frac{d^2V'}{d\beta^2} + \frac{d^2V'}{d\gamma^2} = -4\pi\rho;$$

et, par conséquent,

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} = -4\pi\rho,$$

la valeur de ρ se rapportant au point attiré.

Nous allons montrer, par quelques exemples très-simples, comment les équations (1) et (2) peuvent servir à déterminer la fonction V dont se déduisent les trois composantes de l'attraction.

168. *Application à la sphère.* — La sphère étant supposée formée de couches homogènes, V sera fonction de la distance r du centre de la sphère au point attiré; la résultante de l'attraction sera dirigée suivant la droite qui joint ces deux points, et représentée par $\mu f \frac{dV}{dr}$.

L'équation $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ donnera

$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{\alpha}{r}, \quad \frac{dr}{d\beta} = \frac{\beta}{r}, \quad \frac{dr}{d\gamma} = \frac{\gamma}{r},$$

et l'on aura, par suite,

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{\alpha^2}{r^3}\frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} = \frac{\beta^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{\beta^2}{r^3}\frac{dV}{dr},$$

$$\frac{d^2V}{d\gamma^2} = \frac{\gamma^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{\gamma^2}{r^3}\frac{dV}{dr};$$

et ajoutant ces trois dernières équations, on aura, en supposant d'abord le point hors de la sphère,

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0.$$

La fonction V dépend donc alors d'une équation qui ne renferme pas de différentielles partielles. En la multipliant par r^2, son premier membre devient la dérivée de $r^2 \frac{dV}{dr}$. On aura donc, en désignant par c une constante arbitraire,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{r^2}.$$

Supposons d'abord que la sphère soit creuse et que le point soit dans l'intérieur de la plus petite surface dont nous désignerons le rayon par R_1. L'attraction devant évidemment être nulle pour $r = 0$, il faut qu'on ait

$$c = 0, \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{dV}{dr} = 0.$$

Donc les composantes de l'attraction sont toujours nulles, et le point est en équilibre, quelque position qu'il occupe dans la partie vide de la sphère. Supposons, en second lieu, que le point fasse partie de la masse de la sphère, on a

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\rho,$$

ρ étant une fonction donnée de r.

Multipliant par r^2 et intégrant à partir de R_1, il vient, en observant que $\frac{dV}{dr}$ étant nul pour tous les points de l'intérieur, l'est aussi à la limite R_1,

$$r^2 \frac{dV}{dr} = -4\pi \int_{R_1}^{r} \rho r^2 \, dr.$$

Or, $\int_{R_1}^{r} 4\pi r^2 \rho dr$ est la masse comprise entre cette surface et la sphère qui passe par le point attiré. Si on la désigne par M', on aura

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M'}{r^2}.$$

La valeur absolue de l'attraction sera donc $\frac{\mu f M'}{r^2}$; elle est la même que si la masse M' agissait seule et était réunie au centre.

Si le point attiré est sur la surface extérieure ayant pour rayon R, on aura, en désignant par M la masse totale de la sphère creuse,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{R^2},$$

et l'attraction exercée sur le point aura pour expression

$$\frac{\mu f M}{R^2}.$$

Enfin, considérons un point extérieur à la sphère, c'est-à-dire pour lequel on ait $r > R$, on aura, comme dans le premier cas,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{r^2};$$

mais, à cause de la discontinuité provenant des points de la masse, la constante c n'est pas assujettie à avoir la même valeur que pour les points intérieurs. Pour la déterminer, on fera $r = R$, et l'on devra trouver, d'après le cas précédent,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{R^2}; \quad \text{donc} \quad c = -M,$$

et l'on aura pour tous les points extérieurs,

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{M}{r^2}.$$

L'attraction aura donc pour expression

$$\frac{M\mu f}{r^2},$$

et l'on en conclut ce théorème :

Une sphère creuse composée de couches concentriques homogènes exerce sur les points extérieurs la même action que si toute sa masse était réunie à son centre.

169. *Application au cylindre indéfini.* — Considérons maintenant un cylindre creux indéfini composé de couches homogènes dont la densité n'est fonction que de la distance à l'axe de ce cylindre, que nous prendrons pour axe des z ; son action sur un point quelconque sera dirigée vers le point où l'axe est coupé par un plan perpendiculaire, mené par le point attiré. Nous prendrons ce point de l'axe pour origine, et nous désignerons par r sa distance au point attiré ; l'attraction ne dépendra que de r, et son expression sera

$$\mu f \frac{dV}{dr}.$$

Or, pour les points qui ne font pas partie de la masse du cylindre, on aura, en observant que V est indépendant de γ,

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} = 0;$$

d'où

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = 0.$$

Multipliant par r, on a

$$d\left(r\frac{dV}{dr}\right) = 0;$$

d'où

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{r},$$

c étant une constante arbitraire.

Mais remarquons, comme dans le cas d'une sphère creuse, que les points extérieurs et les points intérieurs à la couche cylindrique étant séparés par ceux de la masse de cette couche, pour lesquels les circonstances sont différentes, il n'y a pas continuité en passant des valeurs de r plus grandes que le rayon de la surface extérieure du cylindre, aux valeurs de r plus petites que le rayon de la surface intérieure.

Pour les points de l'intérieur de cette surface, la valeur de c est invariable; or elle est évidemment nulle pour $r=0$; donc on a, pour tous les points de l'intérieur,

$$\frac{dV}{dr}=0.$$

D'où l'on conclut qu'*un cylindre creux indéfini, composé de couches concentriques homogènes, n'exerce aucune action sur un point situé dans l'intérieur de sa surface interne.*

On démontrerait directement cette proposition de la même manière que pour l'ellipsoïde creux.

Cherchons maintenant la valeur de $\frac{dV}{dr}$ pour les points appartenant à la masse du cylindre; pour ces points, on a

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=-4\pi\rho;$$

et l'on trouve par l'intégration, en désignant par R_1 le rayon de la surface intérieure,

$$r\frac{dV}{dr}=-4\pi\int_{R_1}^{r}\rho\, r\, dr.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, parce que $\frac{dV}{dr}$ est nul pour $r=R_1$, puisqu'il l'est pour tous les points de l'intérieur de la surface dont le rayon est R_1. En faisant $r=R$,

on obtient

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi}{R}\int_{R_1}^{R} \rho r dr.$$

Pour les points extérieurs on doit avoir

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C}{R}.$$

Faisant $r = R$, on trouve, en vertu de l'équation précédente,

$$C = -4\pi\int_{R_1}^{R} \rho r dr.$$

La constante étant ainsi déterminée, on aura pour toute les valeurs de r plus grandes que R,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{C}{r},$$

et l'attraction du cylindre aura pour expression

$$\frac{\mu f C}{r}.$$

On voit qu'elle varie en raison inverse de la distance du point à l'axe du cylindre.

Attraction des ellipsoïdes.

170. Pour connaître les trois composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point, on décomposera ce corps en couches infiniment peu épaisses, par une série de surfaces semblables à celle qui le termine; on cherchera les composantes de l'attraction d'une quelconque de ces couches, en fonction du paramètre qui détermine une des surfaces de cette couche, et de son épaisseur; puis on intégrera ces trois expressions différentielles en faisant varier le pa-

ramètre entre les limites correspondantes aux surfaces extrêmes que l'on doit considérer.

Si l'ellipsoïde est plein, les surfaces limites seront celle de cet ellipsoïde, et son centre.

Si le solide attirant est compris entre les surfaces de deux ellipsoïdes semblables, ces surfaces seront les deux limites.

Mais si le point attiré se trouvait dans l'intérieur du solide, il serait inutile de considérer la partie située au delà de la surface d'un ellipsoïde semblable passant par ce point, parce que l'on sait que son action est nulle.

On voit donc que, dans tous les cas, *la question revient à calculer les trois composantes de l'attraction d'une couche comprise entre deux ellipsoïdes semblables et infiniment rapprochés, sur un point situé en dehors de cette couche, ou sur sa surface.*

Nous commencerons par établir quelques propositions qui ramènent ce problème au cas où le point attiré est situé sur la surface extérieure de la couche. Ces propositions et les calculs qui suivent sont tirés des Mémoires de M. Chasles.

Comparaison de l'action de deux couches homofocales sur un même point extérieur.

171. Considérons une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes semblables, infiniment rapprochés. Les composantes de son action sur un point extérieur M (*fig.* 41) dont les coordonnées sont x, y, z, sont proportionnelles aux dérivées partielles par rapport à x, d'une fonction V qui exprime la somme des masses des éléments de la couche, divisées par leurs distances au point M.

Considérons, en second lieu, une couche homogène d'une densité quelconque, comprise entre deux ellipsoïdes

semblables entre eux, dont l'extérieur passe par M, et qui soient respectivement homofocaux avec ceux qui terminent la première couche; ces deux ellipsoïdes seront complétement déterminés, et les axes de même direction seront dans le même rapport dans les deux systèmes.

Désignons généralement par *points correspondants* sur les surfaces de deux ellipsoïdes quelconques, ceux dont les coordonnées sont respectivement entre elles comme les axes qui leur sont parallèles. Il est facile de reconnaître que, quand ces ellipsoïdes sont homofocaux, la distance d'un point quelconque de l'un à un point quelconque de l'autre est égale à la distance des points respectivement correspondants.

Cette proposition se déduit immédiatement des deux suivantes, dont la démonstration est trop facile pour que nous la rapportions :

1°. *La différence des carrés des distances du centre à deux points correspondants de deux ellipsoïdes homofocaux est constante;*

2°. *Le produit de deux rayons quelconques, pris respectivement dans les deux ellipsoïdes, par le cosinus de leur angle, est le même que pour les rayons menés aux points correspondants.*

La somme des carrés de ces rayons est aussi la même de part et d'autre, en vertu de la première proposition. D'où résulte le théorème en question.

On voit facilement aussi que si l'on considère les deux couches homofocales dont il a été déjà parlé, tout point pris dans l'épaisseur de l'une a son correspondant dans l'autre; et deux portions terminées à des surfaces dont tous les points sont correspondants dans les deux couches, sont proportionnelles aux produits des trois coordonnées des points correspondants, ou aux produits des axes des ellipsoïdes intérieurs ou extérieurs, et, par suite, aux volumes

des deux couches; car on peut décomposer ces deux volumes en parallélipipèdes infiniment petits ayant leurs arêtes parallèles aux axes, et leurs sommets en des points correspondants. Les arêtes de ces parallélipipèdes seront proportionnelles aux axes parallèles; les volumes seront donc proportionnels aux produits des trois axes respectifs, et, par conséquent, leurs sommes ou les deux volumes en question le seront aussi comme nous l'avons annoncé.

Cela posé, partageons le volume de la couche proposée en éléments infiniment petits, et divisons la masse de chacun d'eux par la distance au point M, de l'un quelconque de ses points, que l'on pourra choisir sur la surface même de l'ellipsoïde passant en M', vu l'épaisseur infiniment petite de la couche; nous aurons ainsi tous les éléments de l'intégrale V. Partageons ensuite le volume de la seconde en éléments correspondants, et divisons la masse de chacun par la distance au point M' correspondant de M sur la surface extérieure de la couche donnée. Deux éléments correspondants étant entre eux comme les couches entières, et leurs distances aux points correspondants M, M' étant égales, les deux sommes ou les deux fonctions V seront aussi entre elles comme les masses des deux couches. Or, la fonction V, qui se rapporte à la couche passant par M, est constante pour tous les points de son intérieur, et, par conséquent, pour tous ceux de la surface extérieure de la couche passant par M' : donc aussi la fonction V sera constante pour la couche proposée, quelque position que l'on donne au point M sur l'ellipsoïde homofocal passant par M. Donc *la résultante de l'attraction de la couche proposée sur le point* M *est normale à l'ellipsoïde homofocal passant par ce point.*

Nous pouvons maintenant comparer les actions exercées sur le point M par la première couche, et une autre dont les deux surfaces semblables seraient homofocales à celles

de la première, et seraient comprises entre elles et celle qui passe par M. En effet, les fonctions V qu'elles fourniraient relativement au point M, étant divisées par leurs masses respectives, donnent le même résultat, d'après ce qui a été dit précédemment. D'où il suit que les dérivées partielles de ces deux fonctions sont, comme elles-mêmes, dans le rapport des masses des deux couches; et, par conséquent, *les résultantes des attractions de ces deux couches sur un même point extérieur sont de même direction, et proportionnelles à leurs masses* (*).

Enfin cette proposition nous conduit à la réduction que nous avions annoncée. En effet, nous pouvons supposer que la couche dont nous venons de comparer l'action à celle de la proposée, vienne se confondre avec celle dont la surface extérieure passe par le point M. Ces deux actions étant de même sens, et proportionnelles aux masses des deux couches, l'une d'elles détermine l'autre. D'où l'on voit *que, pour reconnaître l'action d'une couche sur un point extérieur, il suffit de calculer celle qu'exerce sur ce même point une couche homofocale et de même matière, dont la surface extérieure passera par ce point, et de la multiplier par le rapport du volume de la première à celui de la seconde, sans rien changer à sa direction.*

Calcul de l'action d'une couche elliptique sur un point de sa surface.

172. Soit M (*fig.* 42) un point quelconque de la surface extérieure d'une couche homogène, comprise entre deux

(*) Cette proposition conduit facilement, comme l'a montré M. Chasles, et comme nous le ferons voir bientôt, au célèbre théorème de Maclaurin, par lequel on ramène le calcul de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur à celui d'un autre ellipsoïde sur un point de sa surface; problème plus facile et qu'on a su résoudre longtemps avant l'autre.

ellipsoïdes semblables et infiniment rapprochés. L'attraction de cette couche sur ce point sera dirigée suivant la normale MN à l'ellipsoïde extérieur; de sorte qu'on pourra remplacer chaque action élémentaire par sa composante, suivant MN.

Considérons le point M comme sommet d'une infinité d'angles solides, composant l'espace situé d'un même côté du plan tangent.

Soient $d\omega$ l'un quelconque de ces angles, et MM′ la direction d'une de ces arêtes : on peut décomposer la partie de la couche qu'il renferme en éléments dont le volume aura pour expression $r^2 dr d\omega$, r étant leur distance au point M. Multipliant par la densité ρ, par la force attractive f de deux unités de masse, situées à l'unité de distance, par la masse μ du point supposé en M, et divisant par le carré de la distance, on aura l'attraction de l'élément de la couche sur la masse μ; son expression sera

$$\rho f \mu\, dr d\omega;$$

intégrant de M à P, on aura

$$\rho f \mu\, \mathrm{MP}\, d\omega;$$

intégrant ensuite de P′ à M′, on trouvera

$$\rho f \mu\, \mathrm{M'P'}\, d\omega.$$

Or, $\mathrm{M'P'} = \mathrm{MP}$, puisque les deux ellipsoïdes sont semblables; donc l'attraction de la partie comprise dans l'angle $d\omega$ se réduira à

$$2\rho f \mu\, \mathrm{MP}\, d\omega.$$

Multipliant cette force par cos PMK, on aura sa composante suivant la normale, et l'on obtiendra ainsi, en observant que $\mathrm{MP} \cos \mathrm{PMK} = \mathrm{MK}$,

$$2\rho f \mu\, \mathrm{MK}\, d\omega.$$

Cette expression n'est exacte qu'en supposant l'arc PK infiniment petit, comme cela a lieu ici, puisque MK est infiniment petit.

L'angle extrême KMP est droit, parce que PK est un infiniment petit d'un ordre moins élevé que MK; de sorte que, si l'on fait la somme de toutes les expressions semblables, pour tous les éléments $d\omega$, on aura, pour l'action de la couche entière,

$$4\pi\rho f\mu\,\mathrm{MK}.$$

Au lieu de l'épaisseur MK de la couche au point M, il vaut mieux introduire la différence des demi-grands axes a et $a + da$ des deux surfaces.

Or on a

$$\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{MI}} = \frac{\mathrm{QO}}{\mathrm{MO}}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{MK} = \mathrm{QO}\,\frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{MO}}:$$

et l'on peut remplacer $\frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{MO}}$ par $\frac{\mathrm{MI}}{\mathrm{IO}}$ ou $\frac{da}{a}\cdot$ Donc l'action de la couche aura pour expression

$$4\pi\rho f\mu\,\mathrm{P}\,\frac{da}{a},$$

P étant la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en M.

Les composantes de cette action, parallèlement aux axes positifs des x, y, z, s'obtiendront en la multipliant par les cosinus des angles que forme avec ces axes la direction intérieure de la normale. Désignant par a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde, et par x, y, z les coordonnées de M, ces cosinus ont pour valeurs

$$\frac{-\mathrm{P}x}{a^2}, \quad \frac{-\mathrm{P}y}{b^2}, \quad \frac{-\mathrm{P}z}{c^2}.$$

Les trois composantes auront donc respectivement pour

expressions

$$-4\pi\rho f\mu\frac{P^2xda}{a^3},\quad -4\pi\rho f\mu\frac{P^2yda}{ab^2},\quad -4\pi\rho f\mu\frac{P^2zda}{ac^2};$$

la valeur de P^2 étant

$$P^2=\frac{1}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}.$$

On peut observer que, d'après les égalités $\frac{da}{a}=\frac{db}{b}=\frac{dc}{c}$, les expressions des deux dernières composantes se déduiraient de la première en changeant x et a en y et b, ou en z et c.

Calcul des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur.

173. Soient A, B, C les demi-axes d'un ellipsoïde homogène, A étant le plus petit, et posons

$$\frac{B^2-A^2}{A^2}=\lambda^2,\quad \frac{C^2-A^2}{A^2}=\lambda'^2.$$

Désignons par α, β, γ les coordonnées d'un point extérieur; il s'agit de calculer les composantes X, Y, Z de l'attraction de l'ellipsoïde sur ce point, auquel nous supposons l'unité de masse.

Décomposons ce corps en couches infiniment peu épaisses, par des ellipsoïdes semblables. Soient a et $a-da$ les demi-axes des x des deux surfaces qui terminent une couche quelconque, les autres axes s'ensuivront; et, lorsque nous aurons calculé les composantes de l'action de cette couche, il suffira de les intégrer par rapport à a, depuis $a=0$ jusqu'à $a=A$, si l'ellipsoïde est plein. Dans le cas où il s'agirait d'un solide creux terminé par deux ellipsoïdes semblables,

on intégrerait depuis la valeur de a relative à la surface intérieure jusqu'à $a = A$.

Substituons à la couche en question une couche terminée par des ellipsoïdes semblables entre eux, homofocaux à ceux qui terminent la première, et tels que le plus grand passe par le point M.

Soient a', b', c' et $a' - da'$, $b' - db'$, $c' - dc'$ les demi-axes de ces deux ellipsoïdes, on aura les relations suivantes :

(1) $$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2,$$

$$\frac{da}{a} = \frac{da'}{a'}, \quad \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C};$$

(2) $$\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} + \frac{\gamma^2}{c'^2} = 1;$$

les composantes de l'action de cette couche sur le point M seront

$$-4\pi\rho f\alpha \frac{P'^2\, da'}{a'^3}, \quad -4\pi\rho f\beta \frac{P'^2\, da'}{a'\, b'^2}, \quad -4\pi\rho f\gamma \frac{P'^3\, da'}{a'\, c'^2}.$$

Si on les multiplie par $\frac{abc}{a'\, b'\, c'}$, on aura les composantes de l'action de la couche en question ; et l'on trouvera ainsi, en remplaçant $\frac{da'}{a'}$ par $\frac{da}{a}$,

$$dX = -4\pi\rho f\alpha \frac{P'^2\, bc\, da}{a'^3\, b'\, c'},$$

$$dY = -4\pi\rho f\beta \frac{P'^2\, bc\, da}{b'^3\, a'\, c'},$$

$$dZ = -4\pi\rho f\gamma \frac{P'^2\, bc\, da}{c'^3\, a'\, b'}.$$

Posons

$$\frac{a}{a'} = u, \quad \text{d'où} \quad a' = au^{-1};$$

et, en vertu des équations (1),

$$b' = a\sqrt{u^{-2}+\lambda^2},\quad c' = a\sqrt{u^{-2}+\lambda'^2},$$

$$b = a\frac{B}{A},\qquad c = a\frac{C}{A},$$

l'équation (2) donnera

$$(3)\qquad \alpha^2 u^2 + \frac{6^2}{u^{-2}+\lambda^2} + \frac{\gamma^2}{u^{-2}+\lambda'^2} = a^2.$$

Ainsi a et, par suite, a', b', c' dépendent de u.

Il reste à exprimer P'^2 en fonction de u, et les composantes élémentaires dX, dY, dZ seront ramenées à cette seule variable.

Or, on a

$$P'^2 = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{a'^4}+\frac{6^2}{b'^4}+\frac{\gamma^2}{c'^4}} = \frac{a^4}{\alpha^2 u^4 + \frac{6^2}{(u^{-2}+\lambda^2)^2} + \frac{\gamma^2}{(u^{-2}+\lambda'^2)^2}}.$$

Différentiant l'équation (3), pour exprimer da au moyen de du, et ayant égard à la valeur de P'^2, on trouvera

$$P'^2\,da = a'^3\,du,$$

d'où

$$dX = -4\pi\rho f\alpha\frac{bc\,du}{b'c'},$$

$$dY = -4\pi\rho f 6\frac{a'^2 bc}{b'^3 c'}\,du,$$

$$dZ = -4\pi\rho f\gamma\frac{a'^2 bc}{c'^3 b'}\,du.$$

Remplaçant b, c, a', b', c' par leurs valeurs en a et u, a

disparaît, et il vient, en introduisant la masse $M = \frac{4}{3}\pi\rho ABC$,

$$(4)\quad \begin{cases} dX = -\dfrac{3Mf\alpha}{A^3}\dfrac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ dY = -\dfrac{3Mf\beta}{A^3}\dfrac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ dZ = -\dfrac{3Mf\gamma}{A^3}\dfrac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Si l'on intègre ces valeurs depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \frac{A}{A'}$, A' étant le demi-axe des x de l'ellipsoïde homofocal passant par le point donné, on aura les composantes de l'attraction totale ; leurs expressions seront

$$(5)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{3Mf\alpha}{A^3}\displaystyle\int_0^{A'}\dfrac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Y = -\dfrac{3Mf\beta}{A^3}\displaystyle\int_0^{\frac{A}{A'}}\dfrac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Z = -\dfrac{3Mf\gamma}{A^3}\displaystyle\int_0^{\frac{A}{A'}}\dfrac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

A' étant donné par l'équation suivante :

$$\frac{\alpha^2}{A'^2} + \frac{\beta^2}{A'^2 + B^2 - A^2} + \frac{\gamma^2}{A'^2 + C^2 - A^2} = 1,$$

cette équation ne peut donner qu'une seule valeur positive pour A'^2. Les deux valeurs négatives se rapportent aux hyperboloïdes homofocaux.

Si le point μ se trouve à la surface même de l'ellipsoïde, on a $A' = A$, et la seconde limite des intégrales est 1 : ce qui donne pour les composantes de l'action sur un point de la surface de l'ellipsoïde,

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= -\frac{3Mf\alpha}{A^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Y &= -\frac{3Mf6}{A^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ Z &= -\frac{3Mf\gamma}{A^3}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Si le point est intérieur à l'ellipsoïde, on ne devra considérer que l'action d'un ellipsoïde semblable passant par ce point. Mais le rapport de sa masse au cube de son demi-axe des x sera le même que pour l'ellipsoïde proposé; on pourra donc laisser $\frac{M}{A^3}$ dans les formules (6) qui représenteront encore les composantes cherchées.

On reconnaît alors cette propriété remarquable, que chaque composante de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point intérieur ne dépend que de la coordonnée parallèle, et lui est proportionnelle.

On peut remarquer que les formules (5) peuvent se déduire de la seule intégrale qui entre dans la première. Soit, en effet,

$$L = \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on trouvera, en différentiant $L\lambda$ par rapport à λ,

$$\frac{d.\lambda L}{d\lambda} = \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{3}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}};$$

et, différentiant $\lambda' L$ par rapport à λ',

$$\frac{d.\lambda' L}{d\lambda'} = \int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}};$$

ce qui changera les équations (5) dans les suivantes :

$$X = -\frac{3Mf\alpha}{A^3}L, \qquad Y = -\frac{3Mf\beta}{A^3}\frac{d.\lambda L}{d\lambda},$$

$$Z = -\frac{3Mf\gamma}{A^3}\frac{d.\lambda' L}{d\lambda};$$

mais il faut bien remarquer que, quand on aura $\lambda' = \lambda$, il ne faudra faire cette supposition qu'après avoir différentié λL et $\lambda' L$.

174. *Ellipsoïde de révolution aplati.* — Si l'on suppose $B = C$, on a un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles; dans ce cas, $\lambda' = \lambda$, et l'on trouve

$$X = -\frac{3Mf\alpha}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{1+\lambda^2 u^2}, \quad Y = -\frac{3Mf\beta}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^2},$$

$$Z = -\frac{3Mf\gamma}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^2}.$$

Or, on a

$$\int_0^u \frac{u^2\,du}{1+\lambda^2 u^2} = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda u - \operatorname{arc\,tang}\lambda u),$$

$$\int_0^u \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)^2} = \frac{1}{2\lambda^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda u - \frac{\lambda u}{1+\lambda^2 u^2}\right);$$

d'où résulte

$$(7)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{3\,\mathrm{M} f\alpha}{\lambda^3 \mathrm{A}^3}\left(\dfrac{\lambda \mathrm{A}}{\mathrm{A}'} - \operatorname{arc\,tang}\dfrac{\lambda \mathrm{A}}{\mathrm{A}'}\right), \\ Y = -\dfrac{3\,\mathrm{M} f\beta}{2\lambda^3 \mathrm{A}^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{\lambda \mathrm{A}}{\mathrm{A}'} - \dfrac{\lambda \mathrm{A}\mathrm{A}'}{\mathrm{A}'^2+\lambda^2\mathrm{A}^2}\right), \\ Z = -\dfrac{3\,\mathrm{M} f\gamma}{2\lambda^3 \mathrm{A}^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{\lambda \mathrm{A}}{\mathrm{A}'} - \dfrac{\lambda \mathrm{A}\mathrm{A}'}{\mathrm{A}'^2+\lambda^2\mathrm{A}^2}\right). \end{cases}$$

On fera $\mathrm{A}' = \mathrm{A}$ si le point est la surface même de l'ellipsoïde. Si $\lambda = 0$, l'ellipsoïde se réduit à une sphère, et les formules (7) coïncident avec celles que l'on connaissait pour ce cas.

175. *Ellipsoïde de révolution allongé.* — L'ellipsoïde sera encore de révolution si $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, mais il sera allongé vers les pôles; on aura alors $\lambda = 0$, et les formules (5) deviendront

$$X = -\frac{3\mathrm{M}f\alpha}{\mathrm{A}^3}\int_0^{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}},\quad Y = -\frac{3\mathrm{M}f\beta}{\mathrm{A}^3}\int_0^{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda'^2 u_2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z = -\frac{3\,\mathrm{M}f\gamma}{\mathrm{A}^3}\int_0^{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}'}} \frac{u^2\,du}{(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, on a

$$\int_0^u \frac{u^2\,du}{(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{u\sqrt{1+\lambda'^2 u^2}}{2\lambda'^2} - \frac{1}{2\lambda'^3}\,\mathrm{l.}(\lambda' u + \sqrt{1+\lambda'^2 u^2}),$$

et l'intégrale qui entre dans Z s'en déduira en la multipliant par λ' et différentiant le produit par rapport à λ'; on trouvera ainsi

$$\int_0^u \frac{u^2 du}{(1+\lambda'^2 u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda'^3}\left[\text{l.}(\lambda' u + \sqrt{1+\lambda'^2 u^2}) - \frac{\lambda' u}{\sqrt{1+\lambda'^2 u^2}}\right],$$

et, par suite,

$$(8)\left\{\begin{aligned} X &= -\frac{3Mf\alpha}{2\lambda'^3 A^3}\left[\frac{\lambda' A}{A'}\sqrt{1+\frac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}} - \text{l.}\left(\frac{\lambda' A}{A'} + \sqrt{1+\frac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}}\right)\right],\\ Y &= -\frac{3Mf\mathcal{C}}{2\lambda'^3 A^3}\left[\frac{\lambda' A}{A'}\sqrt{1+\frac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}} - \text{l.}\left(\frac{\lambda' A}{A'} + \sqrt{1+\frac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}}\right)\right],\\ Z &= -\frac{3Mf\gamma}{\lambda'^3 A^3}\left[\text{l.}\left(\frac{\lambda' A}{A'} + \sqrt{1+\frac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}}\right) - \frac{\frac{\lambda' A}{A'}}{\sqrt{1+\frac{\lambda'^2 A^2}{A'^2}}}\right]. \end{aligned}\right.$$

L'ellipsoïde se réduira encore à une sphère en supposant $C = A$ ou $\lambda' = 0$; les formules (8) se réduiront à $\frac{0}{0}$, et, traitées par les procédés ordinaires, elles reproduiront encore celles qui conviennent à ce cas particulier.

Nous allons maintenant faire connaître les méthodes au moyen desquelles on résolvait le même problème, avant que celle de M. Chasles fût connue.

Autres méthodes pour calculer l'attraction des ellipsoïdes.

176. Le calcul direct de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point est beaucoup plus facile quand ce point est dans son intérieur ou à sa surface que quand il lui est extérieur. C'est le cas que l'on a traité d'abord; on a ramené ce calcul à des quadratures simples, et les géomètres ont dirigé leurs efforts vers la réduction du second cas

au premier. Ils ont découvert deux théorèmes qui remplissent cet objet : l'un, qui porte le nom de Maclaurin, quoiqu'il n'ait été démontré par ce géomètre que dans un cas particulier; l'autre, qui est dû à Ivory. Nous allons exposer ces différentes théories qui résolvent aussi complétement que possible ce problème, si important dans la théorie du système du monde. Poisson, après beaucoup d'efforts, est parvenu à faire directement le calcul de l'intégration pour le point extérieur ; mais nous ne ferons pas connaître ses recherches sur ce point, parce que les calculs sont trop compliqués, et qu'ils ne nous paraissent pas très-importants pour la question en elle-même.

Soit l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Soient α, β, γ les coordonnées du point intérieur attiré μ, auquel nous supposerons une masse égale à l'unité; ρ la densité de la matière homogène qui compose l'ellipsoïde; ξ, η, ζ les angles que fait avec les axes la direction d'un rayon vecteur quelconque mené par le point μ; $d\omega$ un angle solide infiniment petit dans la direction de ce rayon, et son sommet en μ.

Partageons la portion de l'ellipsoïde comprise dans cet angle solide, par des sphères ayant leurs centres en μ et des rayons r croissants par différences infiniment petites dr; l'expression d'un quelconque de ces éléments de volume sera $r^2\,d\omega\,dr$; et l'attraction étant supposée en raison inverse du carré de la distance, son action sur le point μ aura pour expression

$$f\rho\,d\omega\,dr.$$

Faisant la somme des actions de tous les éléments qui composent l'angle solide depuis le sommet μ jusqu'à sa rencon-

tre avec la surface de l'ellipsoïde, on obtiendra, en désignant le rayon μM par r,

$$f\rho r d\omega.$$

Les trois composantes de l'action de cette portion du solide seront

$$f\rho r \cos\xi\, d\omega, \quad f\rho r \cos\eta\, d\omega, \quad f\rho r \cos\zeta\, d\omega.$$

Soit maintenant r' la valeur négative du rayon μM$'$ de la surface de l'ellipsoïde, correspondante aux mêmes angles ξ, η, ζ. En prolongeant en sens contraire le premier angle solide, on aurait à faire un calcul analogue au précédent; seulement les angles relatifs à sa direction seraient les suppléments de ξ, η, ζ, et la valeur absolue du rayon vecteur serait $-r'$; de sorte que les composantes de la force produite par la portion de l'ellipsoïde comprise dans ce second angle solide auront pour expressions

$$f\rho r' \cos\xi\, d\omega, \quad f\rho r' \cos\eta\, d\omega, \quad f\rho r' \cos\zeta\, d\omega.$$

En les ajoutant aux premières, on aura

$$f\rho(r+r')\cos\xi\, d\omega, \quad f\rho(r+r')\cos\eta\, d\omega, \quad f\rho(r+r')\cos\zeta\, d\omega,$$

et si l'on fait la somme d'expressions de ce genre en prenant pour $d\omega$ tous les éléments d'une demi-sphère quelconque ayant son centre en μ et pour rayon l'unité, on obtiendra les composantes X, Y, Z de l'action de l'ellipsoïde entier sur le point μ. Pour avoir les valeurs de r et r', il faut rapporter l'ellipsoïde à des coordonnées polaires, au moyen des formules

$$x = \alpha + r\cos\xi, \quad y = \beta + r\cos\eta, \quad z = \gamma + r\cos\zeta,$$

ce qui donne pour équation de l'ellipsoïde

$$pr^2 + 2qr = l.$$

En posant

$$\frac{\cos^2\xi}{a^2}+\frac{\cos^2\eta}{b^2}+\frac{\cos^2\zeta}{c^2}=p,$$

$$\frac{\alpha\cos\xi}{a^2}+\frac{6\cos\eta}{b^2}+\frac{\gamma\cos\zeta}{c^2}=q,$$

$$1-\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{6^2}{b^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}=l,$$

on reconnaît de suite que les deux valeurs de r données par l'équation ci-dessus, pour une valeur des angles ξ, η, ζ, sont de signes contraires, puisque p et l sont essentiellement positifs; et l'on aura

$$r+r'=-\frac{2q}{p}.$$

Si maintenant l'on observe que, pour deux directions contraires, $\frac{q}{p}$ est le même, au signe près, et que, par conséquent, les produits $\frac{q\cos\xi}{p}$, $\frac{q\cos\eta}{p}$, $\frac{q\cos\zeta}{p}$ sont les mêmes en grandeur et en signe pour ces deux directions, on reconnaîtra qu'au lieu de prendre pour les directions μM de l'angle solide celles qui sont d'un même côté d'un plan passant par μ, on peut les prendre tout autour de ce point, pourvu qu'on divise par 2 le résultat. Nous aurons donc, en considérant que les sommes Σ se rapportent à toutes les directions autour du point μ,

$$\mathrm{X}=-f\rho\sum\frac{q\cos\xi}{p}d\omega,\qquad \mathrm{Y}=-f\rho\sum\frac{q\cos\eta}{p}d\omega,$$

$$\mathrm{Z}=-f\rho\sum\frac{q\cos\zeta}{p}d\omega.$$

Parmi les sommes partielles dont se composeront les valeurs de X, Y, Z, quand on aura substitué à q sa valeur, se

trouveront les trois suivantes :

$$\sum \frac{\cos\xi \cos\eta \, d\omega}{p}, \quad \sum \frac{\cos\xi \cos\zeta \, d\omega}{p}, \quad \sum \frac{\cos\eta \cos\zeta \, d\omega}{p},$$

qui sont évidemment nulles comme composées d'éléments, deux à deux égaux et de signes contraires; car, en conservant les mêmes valeurs quelconques à deux des trois angles, choisis convenablement, le troisième peut avoir deux valeurs supplémentaires; et, quant au dénominateur, il restera le même dans les deux cas. On aura donc, d'après cette remarque,

$$X = -\frac{f\rho\alpha}{a^2}\sum \frac{\cos^2\xi \, d\omega}{p}, \quad Y = -\frac{f\rho\beta}{b^2}\sum \frac{\cos^2\eta \, d\omega}{p},$$

$$Z = -\frac{f\rho\gamma}{c^2}\sum \frac{\cos^2\zeta \, d\omega}{p}.$$

Pour effectuer ces calculs, il faudrait exprimer l'un des trois angles ξ, η, ζ au moyen des deux autres; mais il vaudra mieux introduire les deux angles que l'on emploie le plus ordinairement dans les coordonnées polaires, et qui sont l'angle formé par le rayon vecteur avec l'un des axes, par exemple l'axe de x, et celui que fait avec l'axe des y la projection du rayon vecteur sur le plan des y et z. Désignant le premier par θ et le second par ψ, on aura

$$\cos\xi = \cos\theta, \quad \cos\eta = \sin\theta \cos\psi, \quad \cos\zeta = \sin\theta \sin\psi.$$

Nous calculerons d'abord la valeur de X; celles de Y et Z s'en déduiront par de simples changements de lettres. Dans ce nouveau système de variables, on aura

$$d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\psi,$$

et

$$X = -\frac{f\rho\alpha}{a^2}\int\int \frac{\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\psi}{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{b^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\psi}{c^2}};$$

l'intégrale par rapport à ψ est prise entre les limites 0 et 2π,

et celle par rapport à θ, entre o et π. Quant à la première, il suffira de la prendre entre o et $\frac{\pi}{2}$, puis de quadrupler le résultat; pour la seconde, on la prendra aussi entre o et $\frac{\pi}{2}$ et l'on doublera le résultat.

Commençons par effectuer l'intégration par rapport à ψ, et posons pour cela $\tang\psi = u$, d'où

$$\sin^2\psi = \frac{u^2}{1+u^2}, \quad \cos^2\psi = \frac{1}{1+u^2}, \quad d\psi = \frac{du}{1+u^2}.$$

On aura ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{p} = a^2b^2c^2 \int_0^{\infty} \frac{du}{c^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) + b^2(a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta)u^2}$$
$$= \frac{\pi a^2 bc}{2\sqrt{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta)}}.$$

Il restera donc à effectuer l'intégration par rapport à θ, ce qui n'est pas possible sous forme finie si les trois axes de l'ellipsoïde sont inégaux. Pour déduire la valeur de Y de celle de X, on observera que si l'on avait introduit l'angle du rayon vecteur avec l'axe des y au lieu de l'axe des x, dans le système des coordonnées polaires, le calcul relatif à Y n'aurait différé de celui que nous venons de faire que par le changement réciproque des lettres a et b; la même remarque s'applique à c, et l'on aura, en conséquence, les formules suivantes :

$$X = -4\pi f\rho bc\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)(a^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta)}},$$

$$Y = -4\pi f\rho ac\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)(b^2\sin^2\theta + c^2\cos^2\theta)}},$$

$$Z = -4\pi f\rho ab\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(c^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)(c^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)}}.$$

On donnera à ces expressions la forme trouvée précédemment, et posant $\cos\theta = u$, elles coïncideront ainsi avec les formules (6), dans lesquelles α, β, γ désignent les coordonnées d'un point quelconque de l'intérieur, ou de la surface de l'ellipsoïde.

Ces valeurs de X, Y, Z étant respectivement de signes contraires à α, β, γ, chacune des composantes tend à rapprocher le point de l'origine. On remarquera encore que ces valeurs ne changeraient pas si l'on multipliait les quantités a, b, c par un même nombre. L'attraction n'est donc pas changée par l'addition ou la soustraction d'une couche comprise entre la surface de l'ellipsoïde proposé et une surface semblable plus grande ou plus petite, pourvu que le point μ soit toujours dans son intérieur; car nos calculs sont fondés sur cette supposition. D'où l'on conclut que le solide homogène compris entre deux ellipsoïdes semblables dont les axes coïncident en direction, n'exerce aucune action sur un point matériel placé dans l'intérieur de sa plus petite surface.

Maintenant que le problème est résolu pour un point intérieur à l'ellipsoïde ou sur sa surface, il suffit d'y ramener le cas d'un point extérieur pour que le problème proposé soit complétement résolu. C'est ce que Maclaurin a essayé de faire au moyen d'un théorème qui a conservé son nom, quoiqu'il ne l'ait pas démontré avec toute la généralité nécessaire. Il avait été établi péniblement par d'autres géomètres; de sorte que l'on pouvait en faire l'usage que nous allons indiquer. Mais, comme sa démonstration n'était pas simple, on a continué à chercher à perfectionner cette importante théorie, et M. Ivory a découvert un autre théorème très-élégant qui remplissait le même objet d'une autre manière, et dont il déduisait même celui de Maclaurin dans toute sa généralité. Après lui, M. Rodrigues a trouvé une autre démonstration analytique fort simple de ce der-

nier théorème, et enfin M. Chasles en a donné une plus simple encore et tout à fait géométrique, que nous avons déjà fait pressentir et que nous allons faire connaître.

177. *Théorème de Maclaurin.* — Ce théorème a pour objet de comparer les actions de deux ellipsoïdes homofocaux, homogènes et de densités quelconques sur un même point extérieur à l'un et à l'autre. A cet effet, on partagera chacun d'eux en couches infiniment minces, par des surfaces ellipsoïdales semblables à la surface qui le termine et respectivement homofocales. Nous avons démontré (n° 165) que deux couches homologues de ces deux corps exercent sur le point extérieur des actions de même direction et proportionnelles aux masses de ces couches, et, par suite, à celles des ellipsoïdes proposés. Il résulte de là qu'en composant toutes ces actions élémentaires qui auront respectivement un rapport constant et une même direction, on aura deux résultantes de même direction, et ayant entre elles ce même rapport. D'où résulte le théorème suivant :

Deux ellipsoïdes homofocaux homogènes exercent sur un même point extérieur quelconque des actions de même direction et proportionnelles aux masses de ces corps.

Cette proposition aura encore lieu lorsque la surface d'un des ellipsoïdes passera par le point même, et l'on voit facilement que pour calculer l'action d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, il suffira de déterminer l'ellipsoïde homofocal passant par ce point, auquel on donnera la même densité qu'au premier. Les formules (6) feront connaître les composantes de son action sur ce point, et il suffira de les multiplier par le rapport du volume de l'ellipsoïde proposé à celui du second pour avoir les composantes de l'action du premier. Nous allons effectuer ce calcul.

178. *Application du théorème de Maclaurin.* — Nous avons démontré précédemment ce théorème, et nous allons montrer maintenant l'usage que l'on en peut faire pour

obtenir l'action d'un ellipsoïde sur un point extérieur, connaissant son expression pour un point intérieur.

Soient A, B, C les trois demi-axes de l'ellipsoïde donné, A′, B′, C′ ceux de l'ellipsoïde homofocal, passant par le point extérieur $(\alpha, 6, \gamma)$. Les composantes de l'action de ce dernier sur ce point se calculent directement, sans difficulté, et sont

$$X' = -\frac{3M'f\alpha}{A'^3}\int_0^1 \frac{v^2\,dv}{\left(1+\frac{B'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{C'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y' = -\frac{3M'f6}{A'^3}\int_0^1 \frac{v^2\,dv}{\left(1+\frac{B'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{C'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Z' = -\frac{3M'f\gamma}{A'^3}\int_0^1 \frac{v^2\,dv}{\left(1+\frac{B'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{C'^2-A'^2}{A'^2}v^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on observe que l'on a

$$B'^2 - A'^2 = B^2 - A^2,\quad C'^2 - A'^2 = C^2 - A^2,\quad \frac{M'}{M} = \frac{A'B'C'}{ABC},$$

et qu'on pose

$$\frac{v}{A'} = \frac{u}{A},$$

ce qui donne o et $\frac{A}{A'}$ pour limites de u; si, ensuite, on multiplie les trois composantes X′, Y′, Z′ par $\frac{ABC}{A'B'C'}$, on aura, d'après le théorème de Maclaurin, les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde donné; et l'on retrouvera ainsi les formules (5).

179. *Théorème d'Ivory.* — Ce théorème a aussi pour objet de ramener l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur

un point extérieur, à celle d'un autre ellipsoïde sur un point de son intérieur. Il n'offre aucun avantage sur celui de Maclaurin; mais, comme nous l'avons dit, son auteur l'a fait connaître à une époque où l'autre n'était pas encore bien rigoureusement, ou du moins, bien simplement démontré; et il a été considéré par les géomètres comme une découverte importante.

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point extérieur à un ellipsoïde dont les demi-axes sont A, B, C; la composante X de son attraction sur ce point sera

$$X = f\rho \int\int\int \frac{(x-\alpha)\,dx\,dy\,dz}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)]^{\frac{3}{2}}},$$

les intégrales s'étendant au volume entier. Intégrant par rapport à x, et désignant par r_1, r_2 les distances du point attiré aux points extrêmes du filet de l'ellipsoïde dans lequel on a fait l'intégration, on trouvera

$$X = -f\rho \int\int dy\,dz\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Concevons maintenant un ellipsoïde homofocal avec le premier, passant par le point donné, et cherchons son attraction sur le point correspondant à ce dernier sur la surface du premier ellipsoïde. Pour cela nous prendrons le rectangle $dy'\,dz'$, dont les points seront les correspondants de ceux de $dy\,dz$, et nous intégrerons dans l'étendue du filet du second ellipsoïde, qui se projette suivant $dy'\,dz'$ sur le plan YZ. Nous trouverons, pour la composante de l'attraction de ce dernier corps sur le point correspondant au point donné,

$$X' = -f\rho \int\int dy'\,dz'\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Les rayons r_1 et r_2 sont les mêmes que pour le premier ellip-

soïde, puisque leurs extrémités sont respectivement correspondantes de celles des autres.

Or, $dy'dz' : dydz :: B'C' : BC$; et cette proportion ayant lieu pour les portions des intégrales relatives à deux filets correspondants quelconques, aura lieu pour les intégrales elles-mêmes; d'où résulte

$$X : X' :: BC : B'C',$$

et de même

$$Y : Y' :: AC : A'C',$$

$$Z : Z' :: AB : A'B'.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant, qui est celui de M. Ivory :

Les attractions que deux ellipsoïdes homofocaux exercent parallèlement à chaque axe, sur deux points correspondants placés sur leurs surfaces respectives, sont entre elles comme les produits des deux axes perpendiculaires à chaque composante.

Poisson a remarqué que ce théorème était indépendant de la loi d'attraction. Car si la fonction de la distance qui exprime l'attraction est désignée par $F(r)$, on aura

$$X = f\rho \int\int\int \frac{(x-\alpha)\,dx\,dy\,dz\,F(r)}{r};$$

intégrant par rapport à x l'expression $(x-\alpha)\,F(r)\frac{dr}{r}$, ou $F(r)\,dr$, et désignant le résultat par $\varphi(r)$, on aura

$$X = f\rho\int\int dy\,dz\,[\varphi(r_1) - \varphi(r_2)].$$

Pour le second ellipsoïde, on trouvera de même

$$X' = f\rho\int\int dy'\,dz'\,[\varphi(r_1) - \varphi(r_2)];$$

d'où l'on conclurait encore

$$X : X' :: BC : B'C',$$

et de même pour les autres composantes.

180. *Application du théorème d'Ivory.* — On voit que, d'après ce théorème, on connaîtra les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur, en faisant passer par ce point un ellipsoïde homofocal, et cherchant les composantes de son attraction sur le point correspondant de la surface du premier; puis multipliant les composantes par les rapports des produits des axes perpendiculaires.

Soient A, B, C les trois demi-axes de l'ellipsoïde proposé, A', B', C' ceux de l'ellipsoïde homofocal passant par le point donné (α, β, γ); A'', B'', C'' ceux d'un ellipsoïde semblable au second et passant par le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ correspondant à (α, β, γ) sur le premier; enfin, M, M', M'' les masses de ces trois corps.

Les composantes de l'attraction du troisième ellipsoïde sur le point $(\alpha', \beta', \gamma')$ seront les mêmes que celles du second. On aura donc, d'après les formules connues pour les points de la surface,

$$X' = -\frac{3M''f\alpha'}{A''^3}\int_0^1 \frac{v^2\,dv}{\sqrt{1+\frac{B''^2-A''^2}{A''^2}v^2}\sqrt{1+\frac{C''^2-A''^2}{A''^2}v^2}}.$$

Mais, d'après la similitude des deux derniers ellipsoïdes, on a

$$\frac{B''^2-A''^2}{A''^2}=\frac{B'^2-A'^2}{A'^2},\quad \frac{C''^2-A''^2}{A''^2}=\frac{C'^2-A'^2}{A'^2}.$$

$\frac{M''}{A''^3}=\frac{M'}{A'^3}$, et, de plus, $\alpha'=\frac{\alpha A}{A'}$; donc, en observant que l'on a $B'^2-A'^2=B^2-A^2$, $C'^2-A'^2=C^2-A^2$, on aura

$$X' = -\frac{3M'f\alpha A}{A'^4}\int_0^1 \frac{v^2\,dv}{\sqrt{1+\frac{B^2-A^2}{A'^2}v^2}\sqrt{1+\frac{C^2-A^2}{A'^2}v^2}}.$$

Posons maintenant

$$\frac{v}{A'} = \frac{u}{A},$$

et multipliant par $\frac{BC}{B'C'}$, on trouvera

$$X = -\frac{3Mf\alpha}{A^3}\int_0^{\frac{A}{A'}} \frac{u^2\,du}{\left(1+\frac{B^2-A^2}{A^2}u^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{C^2-A^2}{A^2}u^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il en serait de même des deux autres composantes, et l'on retombe encore sur les formules (5).

Passage du théorème d'Ivory à celui de Maclaurin.

181. Soient X, Y, Z les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde dont les trois demi-axes sont A, B, C, sur le point extérieur dont les coordonnées sont α, 6, γ; X'', Y'', Z'' les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde homofocal passant par le point (α, 6, γ) sur le point correspondant, qui a pour coordonnées $\frac{\alpha A}{A'}$, $\frac{6 B}{B'}$, $\frac{\gamma C}{C'}$; A', B', C' étant les demi-axes de cet ellipsoïde; et enfin X', Y', Z' les composantes de l'attraction du second ellipsoïde sur le point (α, 6, γ) de sa surface.

Le théorème d'Ivory donne

$$\frac{X}{X''} = \frac{BC}{B'C'}, \quad \frac{Y}{Y''} = \frac{AC}{A'C'}, \quad \frac{Z}{Z''} = \frac{AB}{A'B'};$$

mais pour tout point de l'intérieur d'un ellipsoïde, les composantes de l'attraction sont proportionnelles à la coor-

donnée parallèle; donc

$$\frac{X''}{X'} = \frac{A}{A'}, \quad \frac{Y''}{Y'} = \frac{B}{B'}, \quad \frac{Z''}{Z'} = \frac{C}{C'};$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\frac{X}{X'} = \frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}.$$

Considérons de même un ellipsoïde homofocal ayant pour demi-axes A_1, B_1, C_1, et auquel le point α, β, γ soit extérieur. Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes de son action sur ce point; on aura encore

$$\frac{X_1}{X'} = \frac{A_1 B_1 C_1}{A'B'C'} = \frac{Y_1}{Y'} = \frac{Z_1}{Z'};$$

d'où

$$\frac{X}{X_1} = \frac{Y}{Y_1} = \frac{Z}{Z_1} = \frac{ABC}{A_1 B_1 C_1},$$

ce qui n'est autre chose que le théorème de Maclaurin. Par une marche inverse, on passerait de ce dernier à celui d'Ivory.

182. *Conséquence remarquable du théorème d'Ivory.* — Considérons deux sphères concentriques homogènes ayant pour rayons a et A; le théorème d'Ivory montre que l'action P de la sphère A sur un point situé en m, sur la surface de la sphère intérieure, est à l'action p de la sphère a sur un point situé en M sur la surface de l'autre, comme A^2 est à a^2; on a donc

$$P = p\,\frac{A^2}{a^2}.$$

Ce résultat est indépendant de la loi d'attraction; or, si nous supposons une loi telle, qu'une couche sphérique ho-

mogène n'exerce aucune action sur un point de son intérieur, l'action de la sphère A sur le point M doit être indépendante de A ; ce qui exige que l'on ait

$$p = \frac{c}{A^2},$$

c étant une constante : d'où il suit que l'action d'une sphère quelconque sur des points extérieurs situés à des distances arbitraires de son centre est en raison inverse des carrés de ces distances ; et, comme on peut supposer la sphère aussi petite qu'on voudra, la même loi devra avoir lieu pour l'action d'un point matériel sur des points quelconques. On conclut de là cette proposition importante :

La seule loi d'attraction pour laquelle une courbe sphérique homogène n'exerce aucune action sur les points de son intérieur, est celle de la raison inverse du carré de la distance.

LIVRE SECOND.

DU MOUVEMENT CONSIDÉRÉ INDÉPENDAMMENT DE SES CAUSES.

183. Nous avons fait connaître, dans le premier livre, les lois générales de l'équilibre de forces appliquées à des systèmes quelconques de points : il nous reste maintenant à étudier les mouvements que prennent les différents points de ces systèmes, lorsque les forces qui y sont appliquées n'y sont pas en équilibre.

Mais avant de chercher les mouvements produits par des forces données, il est utile d'étudier le mouvement en lui-même et indépendamment de toute cause. Quand on connaît bien la nature des modifications qu'il peut subir et les divers points de vue sous lesquels ces variations peuvent être envisagées, il est plus facile de reconnaître comment l'action des forces est liée à ces circonstances intimes du mouvement. C'est séparer les difficultés au lieu de les laisser réunies.

Quelquefois, dans la Géométrie, on emploie la considération du mouvement pour la formation des grandeurs. Mais le temps n'y entre pour rien ; il suffit que les lignes ou les surfaces mobiles se trouvent simultanément dans leurs positions correspondantes, quel que soit le temps qu'elles mettent à parvenir de l'une à l'autre. Cette simultanéité est la seule chose importante, et le mouvement est du reste entièrement indéterminé.

Ici, au contraire, on ne s'occupera que de mouvements bien

déterminés dont le temps sera un élément essentiel, et où l'on considérera les positions des différents points du système à chaque instant. Cette étude ne se rapportera donc pas à la Géométrie pure. On pourrait bien en faire une science à part; mais il nous paraît plus convenable de la considérer comme une branche de la Mécanique, qui est la science générale du mouvement. Avant de chercher quel mouvement peut être produit par des forces, il faut connaître intimement ce qu'est le mouvement en lui-même; et cette étude préalable ne sera pour nous que le début nécessaire de la science du mouvement.

C'est cette étude, bornée aux considérations les plus élémentaires et les plus générales, qui fera l'objet de ce second livre, et servira d'introduction à la Dynamique.

CHAPITRE PREMIER.

DU MOUVEMENT D'UN POINT.

184. La notion du temps est une de celles qui ne peuvent être ramenées à aucune autre, et qui, par conséquent, ne sont pas susceptibles de définition. Mais ce qu'il faut définir dans ces sortes de grandeurs, c'est l'égalité; faute de quoi, elles ne seraient pas susceptibles d'être mesurées, ni, par suite, soumises au calcul.

Nous dirons que deux intervalles de temps sont égaux, lorsque deux corps identiques, placés dans des circonstances identiques au commencement de chacun de ces intervalles et soumis aux mêmes actions et influences de toute espèce, auront parcouru des espaces identiques à la fin de ces intervalles. La notion de l'égalité conduit immédiatement à celle d'un rapport quelconque.

Le mouvement d'un point est dit *uniforme*, lorsque ce point parcourt des espaces égaux, en temps égaux, quelque petits que soient ces temps.

Lorsqu'un mouvement n'est ni uniforme, ni composé de mouvements uniformes ayant des durées finies, on l'appelle mouvement *varié*.

183. *Vitesse.* — Les mouvements uniformes peuvent différer les uns des autres par les espaces parcourus dans des temps égaux; et cette considération donne naissance à l'idée, d'abord un peu vague, de vitesse. Pour introduire dans le calcul cet élément indispensable, il est nécessaire d'en donner une définition précise, et nous appellerons *vitesse* d'un point dont le mouvement est uniforme, l'espace qu'il parcourt dans l'unité de temps; ou, en d'autres termes, le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir : de sorte que le point dont la vitesse sera exprimée par le nombre 1, parcourra l'unité de longueur dans l'unité de temps.

On voit, d'après cette définition, que, dans un même mouvement, la quantité que nous appelons vitesse sera d'autant plus grande, que l'unité de temps le sera davantage, ce qui ne s'accorde pas avec l'idée qu'on en a vulgairement; mais le rapport des vitesses dans deux mouvements différents en est complétement indépendant; c'est le rapport des espaces parcourus dans un même temps.

On voit encore que le nombre qui exprime la vitesse varie avec l'unité de longueur; il est d'autant plus grand, que cette unité est plus petite. Ces remarques sur l'influence des diverses unités sont indispensables pour reconnaître *l'homogénéité* des formules de la Dynamique.

Remarque. — Si l'on voulait admettre, à priori, la notion de vitesse et n'en pas donner de définition, il faudrait, comme nous l'avons remarqué dans d'autres circonstances, définir l'égalité de ces sortes de quantités. On dirait alors que les vitesses, dans deux mouvements uniformes, sont égales lorsque les espaces parcourus dans le même temps sont égaux. On définirait l'addition des vitesses par celle

des espaces parcourus dans un même temps. De là résulterait que le rapport de deux vitesses est celui des espaces, et que, par conséquent, la vitesse d'un point est mesurée par l'espace qu'il parcourt dans l'unité de temps, en prenant pour unité la vitesse du point qui, dans l'unité de temps, parcourt l'unité de longueur.

186. Dans le mouvement varié, on ne peut plus appeler vitesse à un instant quelconque l'espace parcouru pendant l'unité de temps, à partir de cet instant, parce qu'alors la vitesse du mobile dépendrait des variations plus ou moins irrégulières que subirait le mouvement au delà de l'époque dont il s'agit : et cette considération ne serait d'aucun intérêt.

C'est ainsi que, dans la théorie des courbes, on a pu prendre pour mesure de la courbe du cercle, en un quelconque de ses points, celle d'un arc égal à l'unité; mais pour une ligne où la courbure n'est pas proportionnelle à la longueur de l'arc, il n'a pas été possible de mesurer la courbure en un point par celle d'un arc égal à l'unité commençant en ce point.

On peut faire des remarques semblables pour le poids spécifique en un point d'une substance hétérogène; pour la température en un point d'un corps inégalement échauffé, etc.

Aussi reconnaîtra-t-on la plus grande analogie entre la manière dont nous avons procédé dans les différentes circonstances que nous venons de rappeler, et celle dont nous allons procéder dans le cas actuel.

Soit M (*fig.* 43) la position qu'occupe, à un certain instant, un point qui décrit d'un mouvement varié une ligne de nature quelconque. Après un certain temps θ, il sera parvenu en un autre point N, et le rapport de l'espace parcouru au temps, ou $\frac{MN}{\theta}$, exprimera la vitesse moyenne avec

laquelle cet arc a été décrit; c'est-à-dire que ce sera l'espace parcouru pendant l'unité de temps, en supposant le mouvement uniforme, et tel que l'arc MN soit parcouru pendant le temps θ. Si maintenant on suppose que θ diminue indéfiniment, la vitesse moyenne $\frac{\text{MN}}{\theta}$ variera en même temps, et tendra vers une limite déterminée, que nous appellerons la vitesse du mobile au point M.

Ainsi, pour employer le langage reçu dans le calcul infinitésimal, on appelle vitesse d'un mobile à un instant donné, la vitesse moyenne avec laquelle il décrit un arc infiniment petit, à partir de cet instant.

Si l'on désigne par t le temps, et par s la longueur des arcs de la ligne décrite, à partir d'une origine arbitraire, la limite du rapport $\frac{\text{MN}}{\theta}$, n'est autre chose que $\frac{ds}{dt}$. Ainsi la vitesse en un point quelconque du mouvement est exprimée par la première dérivée de l'espace parcouru par rapport au temps.

187. Il est bon de remarquer que l'arc décrit dans un temps infiniment petit peut être considéré comme le produit de ce temps par la vitesse du mobile au commencement de ce petit intervalle. Car cet arc serait rigoureusement le produit du temps par la vitesse moyenne relative à cet intervalle, et cette vitesse moyenne diffère d'une quantité infiniment petite de ce que nous avons appelé vitesse au commencement de l'intervalle. Il est évident que l'on pourrait encore prendre la vitesse à une époque quelconque du même intervalle. Le résultat ainsi obtenu ne différera jamais de celui que l'on cherche que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même, et pourra par conséquent lui être substitué toutes les fois que l'on n'aura à considérer que des limites de rapports ou de sommes.

Ainsi, par exemple, l'espace parcouru dans un temps

fini sera la limite de la somme des produits des éléments infiniment petits de ce temps, par les vitesses correspondantes aux commencements de ces éléments. La vitesse telle que nous venons de la définir, joue donc le même rôle dans le mouvement varié, que la vitesse premièrement définie, dans le mouvement uniforme, pourvu que l'on ne considère que des termes infiniment petits; et c'est à cause de cette analogie, qu'il était convenable de lui donner le même nom.

188. *Équation finie du mouvement uniforme.* — Le mouvement uniforme d'un point sur une ligne indéfinie, droite ou courbe, peut être représenté par une équation du premier degré entre le temps et la distance.

Désignons par t le temps compté à partir d'une époque déterminée, par x la distance du point mobile M à une origine fixe O, prise sur la ligne indéfinie X'X que ce point parcourt; a la distance OA de l'origine au point où se trouve le mobile lorsque $t = 0$; enfin v sa vitesse, ou l'espace constant qu'il parcourt dans l'unité de temps.

Cela posé, nous nous proposons de trouver une équation au moyen de laquelle on puisse connaître la position du point mobile, à une époque quelconque, c'est-à-dire une équation entre x et t.

Or le mobile parcourant un espace v dans l'unité de temps, parcourra vt dans le temps quelconque t; et par conséquent, si l'on suppose d'abord que la direction du mouvement soit celle des x positifs OX, à un instant quelconque on aura

$$x = a + vt,$$

x et a étant des quantités positives ou négatives, suivant la position des points A et M par rapport à l'origine; v étant un nombre absolu, et t un nombre positif correspondant aux différentes époques postérieures à celle qui sert d'origine aux temps.

On aperçoit immédiatement qu'il est inutile d'employer une équation distincte de la précédente, pour représenter les positions du mobile, qui correspondent aux époques antérieures à cette origine, et qu'il suffit de donner à t des valeurs négatives dans l'équation ci-dessus.

Enfin, on peut renfermer dans cette même équation les mouvements uniformes, dont la direction est opposée à celle des x positifs; et l'on aperçoit aisément qu'il suffit de supposer que v ne représente pas seulement le nombre d'unités de longueur parcourues dans l'unité de temps, mais ce nombre affecté implicitement du signe —. De cette manière, l'équation générale

$$x = a + vt \tag{1}$$

peut représenter tous les mouvements uniformes, rapportés à des origines quelconques pour les temps et les distances, et à une direction quelconque du mouvement par rapport à celle des x positifs.

Les quatre quantités x, a, v, t peuvent donc être implicitement négatives, et nous venons de déterminer dans quelles circonstances elles devaient être considérées comme telles. Cette manière de les envisager est, comme nous l'avons dit, indispensable pour que tous les cas soient renfermés dans une seule équation; ce qui est de la plus haute importance, comme on le sait, dans toutes les formules algébriques.

Cette équation (1) peut donner lieu à diverses questions simples, que l'on traite ordinairement dans les cours élémentaires d'algèbre, et dont nous ne nous occuperons pas ici.

189. *Équation différentielle du mouvement uniforme.* — Nous avons vu que, dans un mouvement quelconque, la vitesse était mesurée par $\frac{ds}{dt}$, s désignant l'espace parcouru;

cette expression devient, dans le cas actuel, $\frac{dx}{dt}$, indépendamment de toute considération de signe.

Or, si nous prenons t pour variable indépendante, et, par suite, dt positif, $\frac{dx}{dt}$ sera positif si le mouvement a lieu dans le sens des x positifs, et négatif dans le cas contraire. Si donc nous posons $v = \frac{dx}{dt}$, c'est dire que nous entendons par v une quantité positive ou négative, suivant que le mouvement a lieu dans le sens des x positifs ou négatifs; du reste, les origines des temps et des abscisses n'y entrent pour rien, et le mouvement peut être varié d'une manière arbitraire. Ainsi pour avoir une équation qui renferme tous les mouvements uniformes, il suffira de poser

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = v,$$

v désignant une quantité constante, positive ou négative.

Cette équation se déduirait de (1) par la différentiation, comme réciproquement, on en déduirait la première par une intégration, qui introduirait une constante arbitraire a.

190. *Mouvement uniformément varié.* — Après le mouvement uniforme, le plus simple est celui où la vitesse, au lieu d'être constante, varie uniformément, c'est-à-dire de telle sorte que ses accroissements soient proportionnels à ceux du temps. Ce mouvement, qui servira de terme de comparaison aux mouvements variés plus compliqués, mérite qu'on en dise ici quelques mots, et c'est par lui que nous terminerons ces exemples simples.

La condition que la vitesse v ait ses accroissements proportionnels à ceux du temps, entraîne cette autre condition que sa dérivée $\frac{dv}{dt}$ soit constante, et réciproquement. En

désignant donc par a une constante quelconque, positive ou négative, l'équation générale qui renfermera tous les mouvements uniformément variés sera

$$\frac{dv}{dt} = a, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = a \quad \text{puisque} \quad v = \frac{dx}{dt};$$

on déduit de là, en intégrant,

$$(1) \qquad v = at + b = \frac{dx}{dt},$$

équation qu'on aurait pu obtenir immédiatement : en l'intégrant de nouveau, il vient

$$(2) \qquad x = \frac{at^2}{2} + bt + c,$$

b et c désignant deux constantes arbitraires.

Les accroissements de la vitesse sont positifs ou négatifs en même temps que a, qui est l'accroissement de la vitesse, dans un temps quelconque, divisé par ce temps; ou l'accroissement de la vitesse dans l'unité de temps.

On donne à cette quantité le nom particulier d'*accélération*. En entendant que cette accélération peut être positive ou négative, comme nous l'avons dit, le mouvement peut être dit *uniformément accéléré*; et cette dénomination n'entraîne pas l'idée d'une vitesse croissante plutôt que décroissante.

Les équations (1) et (2) dans lesquelles a, b, c peuvent avoir des signes quelconques, donnent lieu à divers problèmes d'algèbre élémentaire, dont la discussion n'offre aucune difficulté, et dans le détail desquels nous ne pouvons entrer ici.

Du mouvement rectiligne varié en général.

191. Dans ce qui précède, nous avons supposé que le point se mouvait sur une ligne quelconque. Mais mainte-

nant que nous allons faire une étude plus approfondie du mouvement, nous supposerons d'abord, pour ne pas réunir toutes les difficultés, qu'il s'effectue sur une ligne droite.

La notion d'accélération que nous venons de donner dans le mouvement uniformément accéléré peut recevoir une extension analogue à celle que nous avons donnée à la vitesse.

En effet, désignons par Δv l'accroissement de vitesse que prend le point, à partir d'un instant quelconque, lorsque le temps croît de Δt, et imaginons un mouvement uniformément accéléré dans lequel la vitesse serait la même que celle du mobile au premier instant, et qui aurait une accélération telle, que la vitesse croîtrait de même de Δv dans le temps Δt; cette accélération moyenne sera mesurée, d'après ce qui précède, par $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, et tendra vers une certaine limite à mesure que Δt tendra vers zéro.

Cette limite est ce que l'on appelle l'*accélération* dans le mouvement proposé, à l'instant que l'on considère. Son expression est

$$\frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Et il est facile de voir qu'elle jouera le même rôle dans le mouvement varié en général, que dans le mouvement uniformément accéléré, pourvu que l'on ne considère que des intervalles infiniment petits. En effet, si Δt est infiniment petit, on aura

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} + \varepsilon,$$

ε étant aussi infiniment petit, et, par conséquent,

$$\Delta v = \frac{dv}{dt}\Delta t + \varepsilon \Delta t.$$

Donc, l'accroissement Δv de la vitesse ne diffère de $\frac{dv}{dt}\Delta t$ que d'une quantité infiniment petite, par rapport à Δv, et qui pourra être négligée toutes les fois qu'on ne considérera que des limites de sommes ou de rapports. Donc, dans tous les cas de ce genre, l'accroissement infiniment petit de vitesse pourra être calculé comme si le mouvement était uniformément accéléré, et que l'accélération de ce mouvement fût égale à ce que nous avons appelé l'accélération dans le mouvement varié en question.

Remarque. — Il est bon de remarquer que nous avons considéré de deux manières fort différentes un mouvement varié quelconque, comme limite de mouvements successifs de durées infiniment petites. Dans un cas, ces mouvements élémentaires sont uniformes, dans l'autre ils sont uniformément accélérés.

Les premiers ont, à l'instant commun, le même $\frac{dx}{dt}$ que le proposé, en d'autres termes, la même vitesse; les seconds, le même $\frac{dx}{dt}$ et le même $\frac{d^2x}{dt^2}$, c'est-à-dire même vitesse et même accélération. Les premiers ont, s'il est permis de s'exprimer ainsi, un contact du premier ordre avec le proposé; les seconds, un contact du second ordre. Mais aussi on ne peut, même dans un temps infiniment petit, remplacer le proposé par les mouvements élémentaires du premier genre que pour calculer les accroissements d'espace; tandis qu'on peut employer les autres pour le calcul de l'accroissement de la vitesse.

Mouvement curviligne d'un point.

192. *Direction de la vitesse.* — La définition que nous avons donnée de la grandeur de la vitesse est indépendante

de la ligne que décrit le mobile, et que l'on nomme ordinairement la *trajectoire*. Mais quand le mouvement est curviligne, il y a une considération de plus à introduire, celle de la direction. Dans le mouvement rectiligne, la droite qui joint une position du mobile avec une autre infiniment voisine, a toujours une même direction, celle de la droite qu'il décrit, et qu'on nomme la direction du mouvement. Dans le mouvement curviligne, la droite qui joint une position déterminée à celle qu'il a, après un temps infiniment petit, varie à mesure que l'intervalle diminue, et tend vers une limite que l'on appelle quelquefois la *direction du mouvement* à l'instant considéré, et que nous nommerons spécialement *direction de la vitesse* à cet instant. Elle se confond évidemment avec la tangente à la trajectoire au point que l'on considère, prise dans le sens du mouvement.

Les cosinus des angles qu'elle fait avec les trois axes d'un système de coordonnées rectangulaires seront donc, en grandeur et en signes,

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

en considérant ds comme la valeur absolue de l'élément de l'arc, et dx, dy, dz comme les accroissements positifs ou négatifs des coordonnées x, y, z du mobile dans le temps infiniment petit dt.

193. *Composition et décomposition des vitesses.* — Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un même point, nous avons vu dans la Statique qu'elles pouvaient être remplacées par une seule; et il y a une construction géométrique très-simple pour obtenir cette résultante, lorsque toutes les forces sont représentées, pour leurs grandeurs et pour leurs directions, par des droites partant de ce point. Lorsque des constructions semblables se rencontrent sans qu'il s'a-

gisse de forces, il est commode d'employer des dénominations analogues qui indiquent immédiatement ce qui, autrement, exigerait de longs développements. C'est dans ce sens que nous emploierons quelquefois ces expressions, *résultante* de droites données de grandeurs et de directions partant d'un même point; *composantes* d'une ligne de direction et de grandeur donnée.

C'est dans ce même sens que nous entendrons la composition et la décomposition des vitesses. Ainsi, pour avoir les composantes d'une vitesse donnée suivant trois directions données, nous construirons sur la droite qui la représente en grandeur et en direction, un parallélipipède dont elle soit la diagonale et dont les trois côtés soient dans les directions choisies pour les composantes. Ce serait l'inverse pour la composition de trois vitesses; et quel que soit le nombre des composantes données ou cherchées, on entendra toujours qu'il y a les mêmes constructions à faire que s'il s'agissait de composer ou décomposer des forces appliquées à un même point. Si l'une des composantes étant parallèle à une direction donnée, toutes les autres lui sont perpendiculaires, cette composante est ce qu'on appelle la vitesse *estimée* suivant cette direction. Ce n'est autre chose que la projection de la vitesse sur cette direction. Nous verrons par l'usage l'utilité que ces transformations peuvent avoir. Mais jusqu'ici il ne faut attacher à ces dénominations de composantes et résultantes de vitesses que le sens précis qui résulte de nos définitions.

194. *Composantes de la vitesse parallèlement aux axes.* — Si l'on suppose les axes rectangulaires, ces composantes ne seront autre chose que les projections de la vitesse sur les axes. En prenant la vitesse en valeur absolue, et sa direction comme nous en sommes convenus, il faudra faire les produits de $\frac{ds}{dt}$ respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; ce qui

donnera pour les composantes de la vitesse,

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt};$$

elles seront positives ou négatives, suivant que la direction de la vitesse fera avec les axes des angles aigus ou obtus.

Mais il est facile de voir que ces expressions subsistent encore dans le cas d'axes obliques.

En effet, soient M une position quelconque du point, et M′ celle qu'il occupe après un temps très-petit; Δx, Δy, Δz les accroissements des coordonnées de M; le parallélipipède dont les arètes sont Δx, Δy, Δz, et la diagonale MM′, tend à devenir semblable à un parallélipipède qui aurait les arêtes parallèles aux axes, et sa diagonale suivant la tangente. Or, ce dernier est semblable à celui dont la diagonale et les arêtes seraient la vitesse et ses composantes : donc les rapports de celles-ci à la vitesse sont les limites des rapports

$$\frac{\Delta x}{MM'}, \quad \frac{\Delta y}{MM'}, \quad \frac{\Delta z}{MM'},$$

ou

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Les multipliant par la vitesse $\frac{ds}{dt}$, on retrouve pour les composantes les expressions précédentes

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}.$$

On peut remarquer que $\frac{dx}{dt}$ est la vitesse d'un point qui se mouvrait sur l'axe des x en ayant toujours la même abscisse que le point dans l'espace; et il en serait de même

pour les deux autres composantes. D'où l'on voit que les composantes de la vitesse d'un mobile sont les vitesses de ses projections rectangulaires, ou obliques, sur les trois axes de coordonnées.

195. *Déviation.* — Considérons un point animé d'un mouvement varié quelconque, et à un instant quelconque menons la tangente à sa trajectoire au point M où il se trouve (*fig.* 44). Concevons ensuite qu'à cet instant un second mobile commence à se mouvoir sur la tangente avec la vitesse qu'a le premier en M; et soient M′, N les positions simultanées de ces deux points après un temps quelconque : la droite NM′ indique de combien le mobile a été dérangé de la position qu'il aurait eue, si sa vitesse était restée constante en grandeur et en direction; sa considération est très-importante dans l'étude du mouvement, principalement lorsque l'intervalle de temps écoulé entre les positions M, M′ est infiniment petit. Nous lui donnerons le nom particulier de *déviation*. Elle pourra être envisagée sous le rapport tant de la grandeur que de la direction qui sera toujours estimée de N vers M′. Elle sera, par conséquent, entièrement déterminée quand on connaîtra en grandeur et en signe ses trois composantes parallèles aux axes. C'est le calcul que nous allons faire, en supposant que le mouvement soit donné, c'est-à-dire que les coordonnées x, y, z du mobile soient des fonctions connues du temps t.

196. *Composantes de la déviation suivant les axes.* — Soit θ un intervalle de temps infiniment petit; les coordonnées de N sur la tangente seront, après ce temps,

$$x + \frac{dx}{dt}\theta, \quad y + \frac{dy}{dt}\theta, \quad z + \frac{dz}{dt}\theta.$$

Celles du point M′ sur la trajectoire seront, en les développant par la formule de Taylor, et représentant par ε,

ε', ε'', des quantités infiniment petites,

$$x + \frac{dx}{dt}\theta + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\right)\frac{\theta^2}{2},$$
$$y + \frac{dy}{dt}\theta + \left(\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon'\right)\frac{\theta^2}{2},$$
$$z + \frac{dz}{dt}\theta + \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon''\right)\frac{\theta^2}{2}.$$

En retranchant les coordonnées de N de celles de M', on aura en grandeurs et en signes les composantes de la déviation NM'; leurs valeurs sont

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\right)\frac{\theta^2}{2}, \quad \left(\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon'\right)\frac{\theta^2}{2}, \quad \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \varepsilon''\right)\frac{\theta^2}{2}.$$

Les expressions des composantes de la déviation peuvent être simplifiées lorsque θ est infiniment petit, car on peut alors négliger le second terme qui est infiniment petit, par rapport au premier; elles se réduisent à

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\theta^2}{2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\theta^2}{2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\theta^2}{2},$$

et la déviation elle-même devient, en supposant les axes rectangulaires,

$$\frac{\theta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)}.$$

197. *Direction de la déviation.* — On appelle direction de la déviation en un point quelconque M, la limite vers laquelle tend la direction NM' à mesure que M' tend vers M. Les cosinus des angles de NM' avec les axes rectangulaires étant toujours proportionnels aux composantes de NM', et respectivement de mêmes signes, il s'ensuit que la direction de la déviation au point M fait avec les axes des angles dont les cosinus peuvent être représentés proportionnellement en grandeurs et en signes par les trois quantités

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Leurs valeurs même s'obtiendraient en divisant ces quantités par

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Si le mouvement avait lieu suivant une ligne droite, la déviation serait évidemment dirigée suivant cette même droite; et, en effet, dans ce cas, les quantités $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ sont proportionnelles à $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

198. *Accélération dans le mouvement déviatoire.*—Nous avons vu qu'en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au second, par rapport à θ, et, par conséquent, infiniment petites par rapport à la déviation NM′, la valeur de cette dernière quantité était

$$\mathrm{NM}'=\frac{\theta^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Elle croît donc comme l'espace parcouru d'un mouvement uniformément accéléré par un mobile partant du repos, l'accélération étant égale à

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Ainsi, en se représentant la déviation comme décrite par le mouvement d'un point, et bornant l'approximation aux quantités du second ordre qui suffisent pour le calcul des accroissements infiniment petits de vitesse, on peut dire que le mouvement déviatoire est uniformément accéléré; et dans ce mouvement l'accélération a pour valeur

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

En multipliant cette expression par les cosinus des angles formés avec les axes par la direction de la déviation, et

calculés ci-dessus, on trouvera pour les composantes de cette accélération, en grandeurs et en signes, les trois expressions

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

199. *Remarque.*—Il faut bien remarquer que cette accélération est celle du mouvement déviatoire, au moyen duquel on regarde la déviation comme décrite, et non pas du mouvement lui-même sur la trajectoire. Ce serait trop détourner les mots de leur sens naturel. Nous avons d'abord appelé accélération, l'accroissement de la vitesse dans l'unité de temps, cet accroissement ayant lieu uniformément; nous avons ensuite étendu cette définition au cas d'une variation quelconque, par la considération des infiniment petits : il n'est pas possible d'aller plus loin sans dénaturer cette notion. Si donc on considérait l'accélération dans un mouvement curviligne varié, il serait naturel d'entendre par là l'accroissement de vitesse rapporté à l'unité de temps, ou $\frac{dv}{dt}$, ce qui ne serait nullement l'accélération du mouvement déviatoire que nous venons de calculer. C'est pourquoi nous ne désignerons jamais cette dernière sous le nom d'accélération du mouvement sur la trajectoire.

200. *Composantes de la déviation suivant la tangente et la normale.* — Nous avons vu que les composantes de la déviation suivant les axes avaient pour expressions, en négligeant les quantités infiniment petites par rapport à ces composantes,

$$\frac{\theta^2}{2}\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{\theta^2}{2}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Soient NM′ (*fig.* 44) la déviation, M′P la perpendiculaire abaissée de M′ sur la tangente en M; NP et PM′ seront, d'après notre définition, les composantes de NM′ suivant la tangente et la direction PM′.

La composante tangentielle NP s'obtiendra, en grandeur et en signe, en projetant sur la tangente les trois composantes de NM′ suivant les axes. En supposant toujours les axes rectangulaires, les cosinus des angles que forme avec eux la direction de la tangente prise dans le sens du mouvement, sont

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds};$$

d'où il suit que la composante tangentielle de la déviation aura pour valeur

$$\frac{\theta^2}{2}\cdot\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds\,dt^2}.$$

Mais de l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

on tire

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s;$$

l'expression précédente devient donc

$$\frac{\theta^2}{2}\,\frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\theta^2}{2}\,\frac{dv}{dt}.$$

Telle est l'expression de la composante tangentielle.

Quant à la seconde composante M′P, on sait que si l'on désigne par R le rayon de courbure de la trajectoire en M, on aura, en négligeant les quantités infiniment petites par rapport à M′P,

$$\text{M}'\text{P} = \frac{\overline{\text{MM}'}^2}{2\text{R}};$$

mais MM′ étant l'espace parcouru dans le temps θ, on pourra remplacer MM′ par $v\theta$, et l'on aura, au degré d'approximation demandé,

$$\text{M}'\text{P} = \frac{\theta^2}{2}\,\frac{v^2}{\text{R}}.$$

Telle est donc l'expression de la composante normale, dont la direction peut être remplacée par sa direction limite, sans changer le degré d'approximation. Cette direction limite est celle de la normale menée du point M au centre de courbure de la trajectoire. Ces deux composantes peuvent être désignées par les noms de *déviation tangentielle* et *déviation centripète*.

On reconnaît facilement, d'après les expressions de ces deux composantes, que, si le mouvement est uniforme, la déviation est normale à la trajectoire; et, s'il est rectiligne, R étant infini, la déviation est dans le sens de la tangente ou de la ligne du mouvement.

201. *Composantes tangentielle et normale de l'accélération dans le mouvement déviatoire.* — Le mouvement déviatoire étant dirigé suivant NM′, et par suite aussi, l'accélération de ce mouvement, les composantes de cette accélération suivant la tangente et la normale principale seront, avec l'accélération elle-même, dans les mêmes rapports que NP, PM′, NM′, et nous avons déjà remarqué que les composantes de l'accélération dans un mouvement rectiligne NM′ sont les accélérations des mouvements des projections du point sur les directions que l'on considère. Nous aurons donc les expressions des composantes de l'accélération en divisant par $\frac{\theta^2}{2}$ les expressions des espaces infiniment petits NP, PM′ parcourus, dans le temps θ.

Les composantes tangentielle et normale de l'accélération du mouvement déviatoire sont donc, la première $\frac{d^2s}{dt^2}$ ou $\frac{dv}{dt}$, et la seconde $\frac{v^2}{R}$.

On les désigne quelquefois sout les noms d'*accélération tangentielle* et *accélération centripète*.

CHAPITRE II.

SUR LE MOUVEMENT GÉOMÉTRIQUE D'UN SYSTÈME DE FORME INVARIABLE.

202. Si l'on considère deux positions successives occupées par un système de forme invariable, indépendamment des forces qui l'ont sollicité, et du temps qu'il a mis pour passer de l'une à l'autre, on voit d'abord qu'il y a une infinité de manières de l'amener de la première à la seconde, et l'on peut se proposer de déterminer les mouvements les plus simples ou les plus avantageux, au moyen desquels on peut, dans chaque cas, opérer ce passage.

Or, quelque déplacement qu'ait subi un système, on peut l'amener dans sa nouvelle position, en faisant d'abord mouvoir tous les points suivant des lignes parallèles et égales à celle qui joint les deux positions d'un même point du système, ou d'un point quelconque qu'on y aura lié invariablement, puis en laissant ce point fixe, et en faisant tourner le système autour de lui, jusqu'à ce que deux autres points, non en ligne droite avec ce centre, viennent prendre la position qu'ils doivent occuper.

Examinons maintenant chacun de ces deux mouvements, de *translation* et de *rotation*.

Il est évident que le point que l'on a considéré pourrait parvenir d'une position à l'autre, en décrivant un polygone quelconque, qui commencerait à l'une et se terminerait à l'autre. D'où il suit que le premier mouvement pourra être remplacé par une suite d'autres mouvements de translation, représentés en grandeur et en direction par les divers côtés de ce polygone. Cette substitution de plusieurs mouvements successifs à un seul s'appellera *composition*, et l'inverse *décomposition*. On peut donc dire que les mouvements de translation peuvent se composer et se décomposer

de la même manière que les forces appliquées à un même point.

Quant au mouvement autour du point fixe, il est facile de reconnaître d'abord qu'il peut être décomposé d'une infinité de manières, en deux mouvements, autour d'axes fixes; car on amènerait un point quelconque d'une position à une autre, en faisant tourner le système autour d'une droite quelconque passant par le point fixe, et située dans le plan mené par ce point, perpendiculairement à la droite qui joint les deux positions du point que l'on considère, lesquelles sont nécessairement équidistantes du centre. Le système ayant maintenant deux de ses points dans la position qu'ils doivent occuper, il est certain que tous les autres arriveront à la leur, par un mouvement de rotation autour de la droite qui joint les deux premiers. La question est donc réduite à la considération des mouvements de rotation autour d'axes passant par le point fixe.

Les propositions que nous allons démontrer relativement à la *composition* et la *décomposition* de ces mouvements sont extraites de la *Théorie nouvelle de la rotation des corps,* de M. Poinsot; mais, avant d'entrer dans cette exposition, nous commencerons par faire une remarque très-simple et très-utile. Lorsqu'un corps tourne autour d'un axe fixe, d'une quantité angulaire infiniment petite, les variations infiniment petites des coordonnées d'un point quelconque dépendent des coordonnées de ce point, et des autres données de la question. Pour un point infiniment voisin, ces variations ne différeront donc des premières que de quantités infiniment petites par rapport à elles, et l'on peut les substituer les unes aux autres, s'il ne s'agit que de limites de sommes ou de rapports. On peut donc, dans la détermination du déplacement infiniment petit d'un corps qui tourne autour d'un axe, supposer que le corps, au lieu de partir de la position donnée, parte d'une

autre position infiniment voisine; les variations des coordonnées de chacun de ces points, ainsi calculées, pourront être prises pour celles que l'on cherchait. Si donc on a à faire éprouver successivement à un corps un nombre quelconque de rotations successives infiniment petites, on pourra supposer chacune d'elles effectuée à partir de la position primitive du corps, et la somme totale des variations des coordonnées de chaque point pourra être considérée comme la variation résultante des mouvements opérés à la suite les uns des autres, et dans un ordre quelconque.

Il est encore facile de s'assurer que si le système tournait de la même quantité infiniment petite autour d'un axe infiniment voisin de celui qui est donné, les variations des coordonnées d'un point à une distance finie ne seraient altérées que de quantités infiniment petites par rapport à elles-mêmes, et qui pourraient conséquemment être négligées. En effet, les variations des coordonnées, en se bornant aux quantités du premier ordre infinitésimal, sont le produit de l'angle de rotation infiniment petit, par des fonctions des quantités qui déterminent l'axe. Si donc ces quantités changent infiniment peu, il en résulte, pour les variations des coordonnées, des changements d'un ordre supérieur au premier.

Ainsi, il n'y a aucune erreur du premier ordre infinitésimal dans l'expression des variations des coordonnées des divers points d'un système rigide qui tourne successivement, de quantités angulaires infiniment petites, autour d'axes en nombre quelconque, lorsque l'on substitue à ces divers points, d'autres points infiniment voisins; que l'on substitue de même à ces axes d'autres axes infiniment peu différents, et quel que soit l'ordre dans lequel on effectue ces différentes rotations. C'est à cause de ces avantages que l'on décompose toujours les mouvements effectués dans des temps finis, dans ceux qui s'accomplissent dans les intervalles infini-

ment petits, dans lesquels on peut décomposer ces temps. Aussi tout ce que nous dirons sur la composition et la décomposition des mouvements se rapportera presque uniquement au cas où ces mouvements seront infiniment petits.

203. *Vitesse angulaire.* — Considérons le mouvement continu de rotation d'un système rigide, et concevons un plan passant par l'axe et lié invariablement au système. La position de ce plan détermine celle de tous les autres points, et peut être donnée à chaque instant par l'angle ψ qu'il fait avec un plan fixe mené par l'axe.

Si les accroissements de cet angle sont proportionnels aux accroissements du temps, le mouvement *angulaire* du système est uniforme. Il en est de même des mouvements des différents points, et leurs vitesses sont proportionnelles à leurs distances à l'axe. On nomme, dans ce cas, *vitesse angulaire* du système, l'angle décrit par le plan mobile dans l'unité de temps; c'est la vitesse de tout point situé à l'unité de distance de l'axe.

Si le mouvement angulaire est varié et que l'angle ψ soit une fonction quelconque du temps, on appellera vitesse angulaire à un instant quelconque la limite de la vitesse angulaire moyenne avec laquelle un angle infiniment petit serait décrit à partir de cet instant. Sa valeur est la dérivée de l'angle par rapport au temps, ou $\frac{d\psi}{dt}$: et l'angle décrit dans un temps infiniment petit peut être considéré comme le produit de la vitesse angulaire par ce temps, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur.

204. *Remarque.* — Il ne faut pas perdre de vue le sens que nous avons attaché à la composition des mouvements. Nous avons supposé que le corps avait deux mouvements successifs, et nous nous sommes proposé de déterminer la position à laquelle il parvenait après leur accomplissement. Quelquefois on dit qu'un corps est animé de plusieurs mouve-

ments simultanés; mais comme effectivement un point ne peut avoir qu'un mouvement à la fois, on entend par là que ce corps a un certain mouvement par rapport à un système rigide, qui lui-même en a un par rapport à un autre système rigide, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on arrive à un système immobile. Il résulte de là, pour le corps, un certain mouvement dans l'espace, qui est continu si les autres le sont, et qui rentre dans les mouvements résultants tels que nous les avons définis. En effet, considérons tous ces mouvements correspondants à un même temps écoulé : concevons d'abord que le corps se meuve seul et accomplisse son mouvement dans le premier système; qu'ensuite ce système exécute son mouvement dans le second, en entraînant avec lui le corps dans la position qu'il y a prise; qu'après cela, le second système exécute son mouvement en entraînant le premier et le corps; et ainsi de suite; il est facile de voir que le corps se trouvera à la fin dans la position où il doit être d'après les données. Mais chacun des mouvements, que nous venons d'indiquer, des systèmes qui entraînent le corps fixement lié à eux, n'est autre chose qu'un mouvement du corps lui-même, et décomposable en un mouvement de translation suivi d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. D'où l'on voit que les mouvements simultanés en question, que l'on appelle quelquefois, assez improprement, des mouvements dont le corps est animé simultanément, le placent à une époque quelconque dans la même position où il arriverait par la composition de ces mouvements telle que nous l'avons définie, c'est-à-dire en les produisant successivement.

205. *Cas des axes concourants.* — Soit OA (*fig.* 45) la direction d'un axe autour duquel un système rigide tourne, d'une quantité angulaire quelconque 2α, le sens de la rotation étant déterminé de la manière indiquée précédemment.

Soit de même OB un second axe autour duquel le système tourne d'une quantité angulaire 2β, quand le premier mouvement est accompli. Nous allons démontrer que le système arriverait à la même position par une rotation unique, autour d'un axe passant par le même point O.

En effet, menons par OA un plan qui fasse avec le plan AOB un angle α, du côté de OB; et par OB un autre plan faisant avec AOB un angle β, du côté de AO. Il est évident qu'après la première des deux rotations, l'intersection OD de ces deux plans aura pris la position symétrique par rapport au plan AOB, et qu'après la seconde rotation, elle aura repris sa première position. Donc le système parviendrait à la seconde position en tournant autour de l'axe OD.

Cette conséquence a lieu, quels que soient les angles 2α, 2β; mais nous examinerons particulièrement le cas où ils sont infiniment petits. Dans l'angle trièdre, formé par les arêtes OA, OB, OD, les sinus des angles BOD, AOD sont entre eux comme $\sin\alpha : \sin\beta$; donc la limite de $\frac{\alpha}{\beta}$, qui est le rapport des vitesses angulaires, en supposant ces angles décrits dans un même temps, est égale au rapport des sinus des angles formés avec OB, OA par la limite de la direction de l'axe OD, qui se trouve dans le plan OAB lui-même. Ainsi, les deux rotations infiniment petites, dont le rapport des vitesses angulaires est connu, se composent en une seule, autour d'un axe dirigé suivant la diagonale OP du parallélogramme construit sur les lignes OM, ON (*fig.* 46), proportionnelles à ces vitesses angulaires, et portées, à partir du point O, sur les axes correspondants.

Il ne reste plus qu'à connaître le sens et la grandeur de la vitesse angulaire du mouvement résultant. Pour cela, on choisira un point quelconque I sur l'axe OA, autour duquel s'est effectuée la première rotation; il ne se déplacera

qu'à la seconde, et il décrira une ligne infiniment petite IL perpendiculaire au plan AOB (*fig.* 46). Abaissons les perpendiculaires IK, IH sur OB, OD. Les angles infiniment petits, dont le point I tourne autour de OB ou de OD, pour parvenir à sa position L, sont dus à des mouvements de même sens, et en raison inverse de IK et IH, ou de sin KOI et sin HOI, ou enfin de OP et ON. Donc la vitesse angulaire résultante sera représentée par la diagonale OP, puisque la vitesse angulaire autour de OB l'est par ON. De plus, d'après ce que nous avons dit, le sens de la rotation autour de OD est de gauche à droite, comme autour de OB. Donc enfin, *si l'on prend sur la direction de deux axes, à partir de leur point de concours, des grandeurs qui représentent les vitesses angulaires des rotations successives autour de ces deux axes, la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux lignes représentera la direction de l'axe de la rotation résultante, et la grandeur de sa vitesse angulaire.*

On conclut de là que *la composition et la décomposition de rotations en nombre quelconque autour d'axes passant par un même point s'effectuent de la même manière que celles des forces dirigées suivant ces axes, et représentées en grandeur par les vitesses angulaires correspondantes.*

206. *Cas des axes parallèles.* — Considérons maintenant deux axes parallèles dont les directions sont dans le même sens, par exemple au-dessus du plan perpendiculaire sur lequel ils sont projetés. Soient A et B leurs projections, et 2α, 2β les angles dont le système tourne successivement autour de A et B. Soit AC (*fig.* 47) la trace d'un plan passant par l'axe A et faisant avec AB l'angle $CAB = \alpha$ du côté de B; et soit de même BC faisant l'angle $CBA = \beta$ du côté de A. La parallèle aux axes, menée par le point C, reviendra à sa première position après les deux rotations, effec-

tuées dans l'ordre indiqué. Le déplacement proposé serait donc produit par une rotation autour de cette droite.

Lorsque les angles α, 6 sont infiniment petits, le point C est sur la droite AB, en un point C' qui la partage en raison inverse des angles α, 6, ou des vitesses angulaires.

De plus, lorsque la rotation est effectuée autour de A, et qu'elle s'effectue ensuite autour de B, le point A étant situé du même côté de C' et B, et la rotation autour de C' devant l'amener au même point, il en résulte qu'elle est dans le même sens que les deux autres. Il ne reste plus qu'à connaître la vitesse de la rotation résultante. Soit AD la ligne infiniment petite que décrit le point A autour de B, il décrira la même ligne autour de C', et les vitesses angulaires seront en raison inverse de AB et de AC'. Donc, si les vitesses angulaires autour de A et B sont représentées respectivement par BC' et AC', la vitesse angulaire résultante le sera par AB.

La loi de composition de deux rotations de même sens autour d'axes parallèles est donc identique avec celle de la composition des forces parallèles de même sens. On trouverait la même identité dans le cas de rotations de sens contraires, soit en le déduisant du précédent, comme dans la composition des forces, ou en le traitant directement.

207. *Couples de rotations.* — Si les deux rotations qu'on a à composer étaient égales et de sens contraires, on aurait ce que M. Poinsot appelle un *couple de rotations.* L'effet de ces deux rotations est de donner un mouvement de translation au système dans le sens de l'axe de ce couple. En effet, soit M (*fig.* 48) un point quelconque du système, il se mouvra dans un plan perpendiculaire aux axes; et si pour chacune des rotations il décrit les lignes infiniment petites MC, ME, respectivement perpendiculaires aux droites MA, MB et proportionnelles à leurs longueurs, il parviendra à l'extrémité N de la diagonale du parallélogramme

construit sur MC, MD. Or, les triangles MCN, AMB sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels, d'où il suit que MN est perpendiculaire à AB. L'effet d'un couple de rotations est donc un mouvement de translation dans le sens de l'axe de ce couple, et qui reste le même, de quelque manière qu'on place ce couple dans son plan, ou dans tout plan parallèle. Pour connaître l'espace parcouru, il suffit de considérer un point quelconque, A par exemple, et il est facile de voir qu'il se déplace d'une quantité égale à la distance AB, multipliée par l'angle de rotation.

Toute translation pouvant ainsi être remplacée par deux rotations, on pourrait se borner à considérer des mouvements de rotation.

Nous avons vu que les mouvements de translation se composent comme les forces appliquées à un même point; il s'ensuit que les couples de rotations se composeront de la même manière; et si l'on porte sur l'axe de chacun d'eux une longueur égale à l'angle de rotation multiplié par le bras de levier de ce couple, c'est-à-dire par la distance de deux axes de rotation, ces longueurs composées comme des forces, à partir du même point, donneront en grandeur et en direction le mouvement de translation résultant.

On remarquera qu'une rotation autour d'un axe A pourra toujours être remplacée par une rotation identique, autour d'un axe B parallèle au premier, plus un couple de rotations dont le bras de levier sera AB; car il suffit pour cela d'introduire deux rotations autour de l'axe B qui soient égales à la première et de sens opposés, ce qui ne change rien au déplacement.

208. *Réduction générale de tout mouvement.*— Quelles que soient les rotations et translations infiniment petites opérées sur un système, elles peuvent se réduire à une rota-

tion autour d'un axe passant par un point arbitraire, et une translation dépendante de ce point.

En effet, toute rotation autour d'un axe peut être changée en une rotation identique autour d'un axe parallèle mené par ce même point quelconque, plus une translation, ou un couple de rotations, dépendant de la position du nouvel axe. Toutes les rotations composées donneront *la même rotation résultante autour d'un axe de direction constante*, quel que soit le point où l'on ait transporté tous les axes. Mais les mouvements de translation ou couples de rotations donnés, composés avec ceux qu'on a introduits, donneront un couple résultant, ou une translation, variable de grandeur et de direction.

209. *Cas particulier où le mouvement est parallèle à un plan.* — Si tous les points du corps se meuvent suivant des lignes parallèles à un même plan, et que l'on conçoive une section faite par un plan fixe parallèle au premier, il en résultera une figure qui se mouvra dans ce plan fixe; et sa position déterminant celle du corps même, il suffira de considérer le mouvement de cette figure.

Or, il est facile de démontrer que tout déplacement infiniment petit qu'elle subira, peut être produit par une rotation autour d'un point déterminé. En effet, on pourra toujours produire ce déplacement, par une translation qui amènera un point A choisi arbitrairement dans la position A' qu'il doit prendre (*fig.* 49), puis, par une rotation convenable 2α effectuée autour de A'. Menons par A' une droite LM perpendiculaire à AA', et deux autres droites faisant de part et d'autre de LM des angles égaux à α; puis, inscrivons entre ces deux droites deux lignes BB', CC', égales et parallèles à AA'.

Les deux points B, C considérés comme liés à la figure auront été transportés en B', C' par la translation; ensuite la rotation amènera B' en B ou C' en C, suivant qu'elle de-

vra être exécutée dans un sens ou dans l'autre. Supposons que ce soit B′ qui revienne en B : le système arrive donc dans la position qu'il doit avoir, sans que le point B quitte sa première position, et par conséquent, par une simple rotation autour du centre B, dont la position est entièrement déterminée par la construction précédente. Le corps aura ainsi effectué une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan.

La question que nous venons de traiter est renfermée dans celle du mouvement d'une figure sur une sphère, laquelle avait été traitée pour la première fois par Euler.

210. *Réduction générale à un mouvement héliçoïdal.* — Nous avons déjà réduit tout mouvement à deux autres, l'un de translation dépendant du point choisi ; l'autre de rotation et constant quant à la direction et à la grandeur. Décomposons le premier en deux, l'un parallèle à l'axe de rotation, l'autre perpendiculaire. Ces mouvements infiniment petits pouvant être effectués dans un ordre quelconque, nous commencerons par la translation parallèle à l'axe ; il restera une rotation et une translation perpendiculaire à l'axe, qui se composeront comme on vient de le voir, en une simple rotation autour d'un axe parallèle au premier.

Tout mouvement est donc réductible à une rotation autour d'un axe, et une translation parallèle à cet axe, mouvement qui n'est autre que celui d'une vis dans son écrou.

On reconnaît facilement que cette translation parallèle à l'axe est la projection, sur cet axe, de la première translation à quelque point qu'elle se rapportât. Elle est toujours la même et égale à la quantité commune dont tous les points du corps, en passant de leur première position à la seconde, se sont éloignés d'un même plan perpendiculaire à la direction déterminée de l'axe. Enfin elle est la plus petite trans-

lation possible, puisqu'elle est la projection de toutes les autres.

On arriverait à ce même résultat par la composition des rotations et des couples de rotations, qui est analogue, comme nous l'avons vu, à celle des forces et des couples. En effet, nous avons démontré dans la Statique que tout système de forces pouvait être ramené à une force, et un couple ayant son axe parallèle à cette force. Donc aussi, tout système de rotations ou translations infiniment petites peut être réduit à une rotation autour d'un axe, et une translation parallèle à cet axe.

211. *Mouvement continu parallèlement à un plan fixe.* —Ce mouvement peut être réduit, comme nous l'avons déjà dit, à celui d'une figure plane dans son plan. Décomposons le temps en éléments infiniment petits. Le mouvement opéré dans chacun de ces intervalles pourra, comme nous l'avons démontré, être considéré comme une rotation effectuée autour d'un point déterminé, que l'on nomme *centre instantané de rotation*; et l'ensemble de ces centres a pour limite un lieu géométrique continu, entièrement déterminé, et immobile sur le plan. Si maintenant l'on considère tous les points liés à la figure mobile, qui sont venus successivement coïncider avec les points du premier lieu à l'instant où ils étaient centres de rotation, on aura un second lieu, invariablement lié avec la figure mobile, et se déplaçant sur le plan. Si l'on connaissait le mouvement de ce lieu, il déterminerait réciproquement celui de la figure qui lui est liée. Or nous allons voir qu'il peut être très-simplement défini.

En effet, soient A, B, C, D, E, F, etc. (*fig.* 50), les positions successives des centres de rotation correspondants aux divers intervalles de temps; A′, B′, C′, D′, etc., les points liés à la figure, et qui viennent coïncider respectivement avec les premiers, à l'instant où ils deviennent centres de

rotation. Lorsque, par exemple, B' est en B, la figure tourne autour de B jusqu'à ce que C' vienne en C; alors elle tourne autour de C jusqu'à ce que D' vienne en D, et ainsi de suite. D'où il suit que ces deux polygones ont les côtés égaux et roulent l'un sur l'autre sans glisser, tandis que la figure arrive successivement à toutes les positions qu'elle doit avoir aux instants considérés.

Supposons maintenant que les intervalles de temps diminuent indéfiniment; les deux polygones tendent à devenir deux courbes déterminées, l'une fixe, l'autre mobile avec la figure à laquelle elle est invariablement liée. Ces deux courbes sont constamment tangentes; des arcs égaux de ces courbes s'enroulent les uns sur les autres, et, par conséquent, il n'y a pas glissement.

Si donc on adaptait à la figure donnée la courbe lieu des centres instantanés relativement à cette figure, il suffirait de faire rouler, sans glisser, cette figure sur celle qui est le lieu des mêmes centres sur le plan fixe; et la figure prendrait ainsi le mouvement qu'elle doit réellement avoir.

Pour avoir le mouvement du corps lui-même, il suffira de considérer les deux surfaces cylindriques qui se projettent sur le plan fixe, suivant ces deux courbes, et de les faire rouler l'une sur l'autre sans glisser.

212. *Mouvement continu autour d'un point fixe.* — Ce mouvement peut être décomposé en une infinité d'autres effectués dans des intervalles de temps infiniment petits, et qui peuvent être considérés comme ayant lieu autour d'axes successifs infiniment voisins; chacun de ces axes peut être considéré comme lié au corps dans la position où il est relativement à lui à l'instant où il devient axe de rotation. On a ainsi deux systèmes de droites, l'un immobile dans l'espace, l'autre fixement lié au corps mobile. Ce second système constitue un angle solide, à faces infiniment petites, qui viennent successivement coïncider avec celles de

l'angle solide fixe. Les deux systèmes forment à la limite deux surfaces coniques, l'une fixe, l'autre liée au corps et toujours tangente à la première suivant une génératrice, puisque les surfaces dont elles sont les limites avaient toujours une face commune.

Il est facile de voir, en outre, qu'elles ne glissent pas l'une sur l'autre. Car la génératrice commune étant l'axe instantané de rotation a une vitesse nulle, et, par conséquent, ne peut se déplacer que d'un infiniment petit du second ordre, dans l'intervalle de temps du premier ordre, pendant lequel a lieu une rotation du même ordre : ce qui exclut tout glissement. Et, d'ailleurs, c'est aussi une conséquence immédiate de ce que des faces égales de surfaces polyédriques s'appliquant toujours les unes sur les autres, les surfaces coniques qui s'enrouleront les unes sur les autres le seront elles-mêmes, et, par conséquent, il n'y aura pas glissement.

On peut donc se représenter le mouvement d'un corps autour d'un point fixe, comme déterminé par le roulement d'un cône fixement lié à ce corps sur un cône immobile dans l'espace ayant, comme le premier, le point fixe pour sommet.

On rentrerait dans le cas précédent en supposant le point fixe à l'infini.

213. *Mouvement continu en général.*—Les mouvements infiniment petits dans lesquels on décomposera le mouvement peuvent être ramenés d'une infinité de manières à une translation et une rotation ; nous nous bornerons à considérer celle où la translation est parallèle à l'axe de rotation. M. Poinsot n'a pas cru devoir parler de ce cas, parce que la marche à suivre est la même que dans les précédents, et que cela l'aurait écarté, sans aucun intérêt, de son objet. L'ensemble des axes de rotation et de glissement forme une surface réglée dans l'espace, et une autre dans le corps

mobile. Toutes les génératrices de la seconde viennent successivement s'appliquer sur celles de la première; et, en supposant que la rotation soit exécutée après la translation, une génératrice de la seconde viendra, par une rotation, s'appliquer sur sa correspondante, sur laquelle elle glissera d'abord en entraînant le corps dans sa translation, et autour de laquelle elle tournera ensuite jusqu'à ce que les deux génératrices suivantes soient venues coïncider; et ainsi de suite.

Or, au moment où la rotation autour d'une génératrice commune a amené une seconde génératrice à coïncider, les deux surfaces ont deux génératrices communes, et, par conséquent, sont tangentes dans toute l'étendue de ces génératrices. On peut donc dire que le mouvement du corps peut être réalisé par le mouvement d'une surface réglée, liée à ce corps sur une autre surface réglée fixe dans l'espace, à laquelle elle est tangente suivant toute une génératrice, et sur laquelle elle roule en glissant le long de cette génératrice.

Le rapport du glissement à la rotation dépend de la nature du mouvement et peut même être nul. Si l'une des surfaces est développable, il est clair que l'autre l'est aussi, puisque leurs éléments coïncident dans toute leur longueur.

On rentre dans le cas précédent s'il y a un point fixe dans le corps; les deux surfaces deviennent des cônes, et le glissement est nul.

Démonstration analytique des propositions précédentes.

214. Il n'est pas inutile de voir comment les principales propositions qui viennent d'être établies sur le mouvement d'un corps solide, peuvent être démontrées par le calcul. Nous déterminerons la position du corps à chaque instant, au moyen des coordonnées rectangulaires d'un point quel-

conque O lié à ce corps, et des angles formés avec les axes fixes AX, AY, AZ par trois axes rectangulaires OX_1, OY_1, OZ_1 liés invariablement au corps et passant par le point O.

Soient a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' les cosinus des angles que forment les axes des x', y', z' respectivement avec ceux des x, y, z, et ξ, η, ζ les coordonnées du point arbitraire du système mobile par lequel on mène les axes des x', y', z', dont on a choisi la direction dans le corps, indépendamment du point O par lequel on les fait passer. On aura, entre les coordonnées d'un point quelconque M dans les deux systèmes d'axes, les relations connues

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \xi + ax' + by' + cz', \\ y = \eta + a'x' + b'y' + c'z', \\ z = \zeta + a''x' + b''y' + c''z'. \end{cases}$$

Considérons un point déterminé du système pour lequel, par conséquent, $x'y'z'$ seront indépendants du temps t. Supposons que t augmente d'une quantité finie Δt, et désignons par la caractéristique Δ les accroissements finis correspondants des autres variables. Les équations (1) donneront

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta x = \Delta\xi + x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c, \\ \Delta y = \Delta\eta + x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c', \\ \Delta z = \Delta\zeta + x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c''. \end{cases}$$

Les premiers membres de ces équations sont les composantes du déplacement de ce point, parallèlement aux axes fixes; les premiers termes des trois seconds membres sont les composantes du déplacement de O; et il est facile, comme nous allons le voir, d'interpréter les trois derniers termes de chacun des seconds membres. En effet, si en supposant le point O fixe, on change la direction des axes X', Y', Z', de manière que dans le temps Δt les cosinus a, b, c, a', etc., varient des mêmes quantités Δa, Δb, etc., il faudra laisser

ξ, η, ζ constants dans les équations (1), et les seconds membres des équations (2) seront réduits à la seconde partie que nous cherchons à interpréter. D'où l'on voit que ces secondes parties ne sont autre chose que les composantes du déplacement que prendrait le point quelconque M si l'on donnait au système un mouvement autour du point fixe O, qui fît changer, dans le temps Δt, les inclinaisons des axes X_1 Y_1 Z_1 de la même manière que dans le déplacement réel. Il suffit donc, pour amener chaque point dans sa véritable position, de faire exécuter au corps les deux mouvements successifs qui produiront ces deux composantes pour chaque point. D'où résulte cette proposition générale :

Tout déplacement fini d'un système rigide peut être produit en lui donnant d'abord un mouvement de translation qui amène un quelconque de ses points dans la position qu'il doit avoir; puis un mouvement de rotation autour de ce dernier point, mouvement qui est le même, quel que soit le point choisi, et ne dépend que des changements de direction des lignes du système.

Il est évident qu'on aurait pu effectuer d'abord la rotation autour du point o pris dans sa première position, puis effectuer la translation; les valeurs de Δx, Δy, Δz seraient les mêmes, et, par conséquent, le système arriverait à la même position. C'est ce que l'on reconnaîtrait d'ailleurs immédiatement par la Géométrie.

215. *Simplification du mouvement autour d'un point.* — Il est facile de voir que tout déplacement du corps autour du point fixe O peut être produit par une rotation autour d'un axe passant par ce point.

En effet, en supposant le point O fixe, les équations (2) donnent, pour Δx, Δy, Δz, des valeurs qui seront nulles pour tous les points du corps qui satisferont aux équa-

tions

$$(3)\quad \begin{cases} x'\Delta a + y'\Delta b + z'\Delta c = 0, \\ x'\Delta a' + y'\Delta b' + z'\Delta c' = 0, \\ x'\Delta a'' + y'\Delta b'' + z'\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

Tous ces points auront donc la même position avant et après le déplacement. Si, en éliminant x', y', et, par suite, z', entre ces trois équations, l'équation de condition résultante est satisfaite, il y aura une infinité de valeurs pour x', y', z' satisfaisant aux équations (3) et qui correspondront à des points en ligne droite avec l'origine O; sinon, l'origine seule satisferait. Or nous allons voir que cette équation de condition est satisfaite; d'où il résultera que tous les points d'une certaine droite passant par O ont conservé leur position première après le déplacement, et, par conséquent, que ce déplacement peut être opéré en faisant tourner le système autour de cette droite fixe.

En effet, les quantités a, b, c, a', etc., satisfont constamment aux équations suivantes :

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$
$$ab + a'b' + a''b'' = 0, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0.$$

D'où l'on tire, en donnant à a, b, c, etc., les accroissements Δa, Δb, etc., et retranchant les équations précédentes,

$$(4)\quad \begin{cases} (a + \frac{1}{2}\Delta a)\Delta a + (a' + \frac{1}{2}\Delta a')\Delta a' + (a'' + \frac{1}{2}\Delta a'')\Delta a'' = 0, \\ (b + \frac{1}{2}\Delta b)\Delta b + (b' + \frac{1}{2}\Delta b')\Delta b' + (b'' + \frac{1}{2}\Delta b'')\Delta b'' = 0, \\ (c + \frac{1}{2}\Delta c)\Delta c + (c' + \frac{1}{2}\Delta c')\Delta c' + (c'' + \frac{1}{2}\Delta c'')\Delta c'' = 0; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} a\Delta b + b\Delta a + a'\Delta b' + b'\Delta a' + a''\Delta b'' + b''\Delta a'' \\ \qquad + \Delta a\Delta b + \Delta a'\Delta b' + \Delta a''\Delta b'' = 0, \\ a\Delta c + c\Delta a + a'\Delta c' + c'\Delta a' + a''\Delta c'' + c''\Delta a'' \\ \qquad + \Delta a\Delta c + \Delta a'\Delta c' + \Delta a''\Delta c'' = 0, \\ b\Delta c + c\Delta b + b'\Delta c' + c'\Delta b' + b''\Delta c'' + c''\Delta b'' \\ \qquad + \Delta b\Delta c + \Delta b'\Delta c' + \Delta b''\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

Cela posé, multiplions les équations (3) respectivement par $a+\frac{1}{2}\Delta a$, $a'+\frac{1}{2}\Delta a'$, $a''+\frac{1}{2}\Delta a''$, et ajoutons-les ; nous aurons, en vertu de la première équation (4),

$$\begin{aligned}&y'[(a+\tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta b+(a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta b'+(a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta b'']\\&+z'[a+\tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta c+(a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta c'+(a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta c'']=0.\end{aligned}$$

On trouverait deux autres équations en multipliant les équations (3) successivement par

$$b+\tfrac{1}{2}\Delta b,\quad b'+\tfrac{1}{2}\Delta b',\quad b''+\tfrac{1}{2}\Delta b'',$$

et par

$$c+\tfrac{1}{2}\Delta c,\quad c'+\tfrac{1}{2}\Delta c',\quad c''+\tfrac{1}{2}\Delta c''.$$

On pourra ainsi remplacer les équations (3) par les suivantes :

$$(6)\ \left\{\begin{aligned}&y'(a\Delta b+a'\Delta b'+a''\Delta b''+\tfrac{1}{2}\Delta a\Delta b+\tfrac{1}{2}\Delta a'\Delta b'+\tfrac{1}{2}\Delta a''\Delta b'')\\&+z'(a\Delta c+a'\Delta c'+a''\Delta c''+\tfrac{1}{2}\Delta a\Delta c+\tfrac{1}{2}\Delta a'\Delta c'+\tfrac{1}{2}\Delta a''\Delta c'')=0,\\&z'(b\Delta c+b'\Delta c'+b''\Delta c''+\tfrac{1}{2}\Delta b\Delta c+\tfrac{1}{2}\Delta b'\Delta c'+\tfrac{1}{2}\Delta b''\Delta c'')\\&+x'(b\Delta a+b'\Delta a'+b''\Delta a''+\tfrac{1}{2}\Delta b\Delta a+\tfrac{1}{2}\Delta b'\Delta a'+\tfrac{1}{2}\Delta b''\Delta a'')=0,\\&x'(c\Delta a+c'\Delta a'+c''\Delta a''+\tfrac{1}{2}\Delta c\Delta a+\tfrac{1}{2}\Delta c'\Delta a'+\tfrac{1}{2}\Delta c''\Delta a'')\\&+y'(c\Delta b+c'\Delta b'+c''\Delta b''+\tfrac{1}{2}\Delta c\Delta b+\tfrac{1}{2}\Delta c'\Delta b'+\tfrac{1}{2}\Delta c''\Delta b'')=0.\end{aligned}\right.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(7)\ \left\{\begin{aligned}&c\Delta b+c'\Delta b'+c''\Delta b''+\tfrac{1}{2}\Delta c\Delta b+\tfrac{1}{2}\Delta c'\Delta b'+\tfrac{1}{2}\Delta c''\Delta b''=p,\\&a\Delta c+a'\Delta c'+a''\Delta c''+\tfrac{1}{2}\Delta a\Delta c+\tfrac{1}{2}\Delta a'\Delta c'+\tfrac{1}{2}\Delta a''\Delta c''=q,\\&b\Delta a+b'\Delta a'+b''\Delta a''+\tfrac{1}{2}\Delta b\Delta a+\tfrac{1}{2}\Delta b'\Delta a'+\tfrac{1}{3}\Delta b''\Delta a''=r;\end{aligned}\right.$$

d'où résultera, d'après les équations (5),

$$(8)\ \left\{\begin{aligned}&b\Delta c+b'\Delta c'+b''\Delta c''+\tfrac{1}{2}\Delta b\Delta c+\tfrac{1}{2}\Delta b'\Delta c'+\tfrac{1}{2}\Delta b''\Delta c''=-p,\\&c\Delta a+c'\Delta a'+c''\Delta a''+\tfrac{1}{2}\Delta c\Delta a+\tfrac{1}{2}\Delta c'\Delta a'+\tfrac{1}{2}\Delta a''\Delta b''=-q,\\&a\Delta b+a'\Delta b'+a''\Delta b''+\tfrac{1}{2}\Delta a\Delta b+\tfrac{1}{2}\Delta a'\Delta b'+\tfrac{1}{2}\Delta a''\Delta b''=-r.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, les équations (6) qui sont équivalentes aux équations (3), s'écriront ainsi :

$$(9)\ \left\{\begin{aligned}&qz'-ry'=0,\\&rx'-pz'=0,\\&py'-qx'=0.\end{aligned}\right.$$

Or il est facile de reconnaître que ces équations se réduisent à deux ; car, si l'on multiplie la première par p, la seconde par q, la troisième par r, et qu'on les ajoute, on aura une équation qui pourra être substituée à l'une des trois ; et comme elle est identique, les trois équations se réduisent à deux. Le nombre des solutions est donc infini, et le lieu des points qu'elles représentent est une droite passant par le point de rencontre des axes X′, Y′, Z′.

Les équations (9) sont donc les équations, par rapport aux axes X′, Y′, Z′, de l'axe autour duquel il faudrait faire tourner le système pour l'amener dans la position où il arrive quand le point O restant fixe, les cosinus a, b, c, a', etc., prennent les accroissements Δa, Δb, etc.

Il est donc démontré que :

Tout déplacement d'un système rigide peut être produit par un mouvement de translation qui amène un quelconque de ses points dans la position qu'il doit avoir, suivi d'un mouvement de rotation autour d'un axe passant par ce dernier point, et indépendant du point choisi.

Les cosinus des angles de l'axe de rotation avec les axes X′, Y′, Z′, sont proportionnels à p, q, r, et ont par conséquent pour valeurs

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

Le même axe fait avec les axes des x, y, z des angles dont les cosinus seront, par suite,

$$\frac{ap+bq+cr}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{a'p+b'q+c'r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{a''p+b''q+c''r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

216. *Valeur de la rotation.* — Il suffit de connaître l'angle dont tourne la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque sur l'axe de rotation. Nous prendrons à cet effet un

point situé sur l'un des trois axes, à la distance 1 de l'origine O : considérons-le par exemple sur l'axe des z. La distance de ce point à l'axe est le sinus de l'angle de cet axe avec OZ, ou $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$; la droite qui joint la première et la seconde position du même point est $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$, les quantités Δx, Δy, Δz étant données par les équations (2) dans lesquelles $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, x', y' sont supposés nuls, et $z'=1$; ce qui donne, pour la longueur de cette droite,

$$\sqrt{\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}.$$

Mais cette même longueur divisée par la distance du point à l'axe de rotation donne le double du sinus du demi-angle de rotation, que je désignerai par ω; on aura donc

$$2\sin\frac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+q^2}};$$

mais on aurait de même trouvé, en choisissant le point sur les axes des x' ou y',

$$\frac{\sqrt{\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{p^2+r^2}},$$

et

$$\frac{\sqrt{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}{\sqrt{q^2+r^2}};$$

d'où résulte

$$\frac{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2}{q^2+r^2} = \frac{\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2}{p^2+r^2} = \frac{\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}{p^2+q^2}$$

$$= \frac{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2+\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2+\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}{2(p^2+q^2+r^2)}.$$

L'angle ω sera donc exprimé par la formule suivante, au

moyen des données immédiates :

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sin\frac{1}{2}\omega \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\Delta a^2+\Delta a'^2+\Delta a''^2+\Delta b^2+\Delta b'^2+\Delta b''^2+\Delta c^2+\Delta c'^2+\Delta c''^2}. \end{aligned} \right.$$

217. *Les déplacements de tous les points ont des projections égales sur l'axe de rotation.* — En effet, concevons un plan fixe perpendiculaire à cet axe; tous les points du système s'en éloignent ou s'en rapprochent également par la translation commune. Or la rotation qui suit ne change pas leur distance à ce plan qui est perpendiculaire à l'axe. Donc les déplacements de tous les points donnent une même projection sur l'axe. Il en résulte que si, par un même point de l'espace, on menait des droites parallèles et égales aux déplacements de tous les points du système, les extrémités de toutes ces lignes seraient dans un même plan perpendiculaire à l'axe; et, par conséquent, il suffirait, pour avoir la direction de cet axe, de mener par un même point des droites égales et parallèles à trois déplacements, non parallèles à un même plan; de faire passer un plan par leurs extrémités qui ne seront pas en ligne droite, et d'élever une perpendiculaire à ce plan.

Si l'on commence par donner au système un mouvement de translation parallèle à l'axe et égal à la projection des déplacements réels sur l'axe, le système ne devra plus se mouvoir que parallèlement à un plan perpendiculaire à cet axe; d'où résulte cette proposition :

Tout mouvement d'un corps solide peut être produit par deux mouvements successifs; le premier perpendiculaire à un plan, et le second parallèle à ce même plan.

218. *Mouvement d'un système parallèlement à un plan.* — Nous avons démontré, par une construction très-simple, que quand ce mouvement ne consiste pas en une simple

translation, il peut se réduire à une rotation. C'est aussi ce que le calcul démontre facilement.

En effet, en prenant les axes des x, y, x', y' dans le plan donné, les équations générales (1) peuvent être mises sous la forme connue

$$x = \xi + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = \eta + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

α désignant l'angle de l'axe des x' avec l'axe des x. Or il est facile de voir qu'il existe un point qui a la même position avant et après le déplacement; car il suffit de déterminer x', y' par les conditions $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, qui donnent

$$\Delta\xi + x'\Delta\cos\alpha - y'\Delta\sin\alpha = 0,$$
$$\Delta\eta + x'\Delta\sin\alpha + y'\Delta\cos\alpha = 0.$$

Ces équations déterminent un seul système de valeurs de x', y', et, par conséquent, un seul point du système ayant la même position après et avant le déplacement. Les coordonnées de ce point ne peuvent jamais être infinies, parce que leur dénominateur commun est

$$(\Delta\cos\alpha)^2 + (\Delta\sin\alpha)^2,$$

et ne peut jamais être nul, à moins toutefois que l'on n'ait

$$\Delta\cos\alpha = 0, \quad \Delta\sin\alpha = 0,$$

ce qui supposerait que l'angle α est resté le même, et que, par conséquent, le mouvement consiste dans une simple translation. D'où se conclut cette proposition :

Tout déplacement d'un corps, dans lequel ses points restent dans des plans parallèles à un plan fixe, et qui ne consiste pas dans une simple translation, peut être produit par une rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan.

219. *Tout déplacement peut être produit par un mouvement hélicoïdal.* — En effet, tout déplacement d'un corps peut être produit par une translation suivie d'une rotation autour d'un axe de direction fixe. Or cette translation peut être remplacée par deux autres successives : l'une parallèle à l'axe et de grandeur invariable; l'autre perpendiculaire à l'axe et dépendant, ainsi que la position absolue de l'axe, du point choisi pour déterminer la translation. Cette dernière translation et la rotation déterminant un mouvement parallèle à un plan perpendiculaire à l'axe, peuvent être remplacées par une simple rotation autour d'une parallèle à cet axe. Donc :

Tout déplacement d'un corps peut être effectué en le liant à une droite fixe et le faisant glisser le long de cette ligne, puis tourner autour d'elle ; et ces deux mouvements successifs peuvent être remplacés évidemment par un mouvement hélicoïdal.

Cette proposition est démontrée ici pour un déplacement fini quelconque. Elle n'avait été considérée précédemment que dans le cas, le plus généralement utile, d'un déplacement infiniment petit.

220. Les quantités p, q, r ont entre elles des relations qui peuvent servir quelquefois à la simplification des formules, et que nous allons faire connaître. Soit O (*fig.* 51) le point de rencontre des axes mobiles $X'Y'Z'$; supposons-le fixe, et menons trois axes OX, OY, OZ parallèles aux axes fixes. Soit OI l'axe autour duquel s'opérerait la rotation qui amènerait le système dans la position déterminée par les accroissements Δa, Δb, etc.; les cosinus des angles de OI avec les axes X', Y', Z' sont proportionnels à p, q, r. Concevons que trois axes, coïncidant d'abord avec X, Y, Z, soient liés à X', Y', Z' et entraînés avec eux. Soient $X_1 Y_1 Z_1$ les positions de ces nouveaux axes après le déplacement effectué. Prenons sur OX, OX_1 les longueurs OA, OA_1 égales à 1 :

le point qui était en A avant la rotation, sera arrivé en A_1, et par conséquent AA_1 fera un angle droit avec l'axe OI.

Or les axes $X'Y'Z'$ dans leur nouvelle position font avec OX_1 les mêmes angles qu'ils faisaient primitivement avec OX, puisque OX_1 qui leur est lié coïncidait d'abord avec OX; les cosinus de ces angles sont donc a, b, c. Ces mêmes axes font avec OX des angles dont les cosinus sont $a+\Delta a$, $b+\Delta b$, $c+\Delta c$. Ces derniers sont les projections de OA sur les axes $X'Y'Z'$, et les premiers les projections de OA' sur les mêmes axes; de sorte que Δa, Δb, Δc ne sont autre chose que les projections de la droite A'A sur les axes $X'Y'Z'$, et, par conséquent, les cosinus des angles que la direction A'A fait avec les axes X', Y', Z' sont proportionnels à Δa, Δb, Δc, et respectivement de mêmes signes. Donc, puisque les directions OI et A'A sont perpendiculaires entre elles, on aura

$$p\Delta a + q\Delta b + r\Delta c = 0.$$

En considérant les axes des Y et Z au lieu de l'axe des X, on aura deux équations analogues; ce qui donne les trois équations suivantes :

$$(11)\qquad \begin{cases} p\Delta a + q\Delta b + r\Delta c = 0, \\ p\Delta a' + q\Delta b' + r\Delta c' = 0, \\ p\Delta a'' + q\Delta b'' + r\Delta c'' = 0. \end{cases}$$

Si maintenant on fait pour les axes des x', y', z' ce qu'on vient de faire sur ceux des x, y, z, c'est-à-dire si l'on prend sur chacun de ces axes un point à la distance I de l'origine, et que l'on exprime que la droite qui joint la première et la seconde position de chacun d'eux est perpendiculaire à OI, on aura trois équations nouvelles.

En prenant, par exemple, le point sur OX', les projections de son déplacement sur les axes X, Y, Z seront Δa, $\Delta a'$, $\Delta a''$, et seront proportionnelles aux cosinus des angles

que fait avec X, Y, Z, la direction suivant laquelle le point s'est déplacé. Si on les multiplie respectivement par les cosinus des angles que fait OI avec ces mêmes axes, la somme de ces produits sera nulle, puisque l'angle des deux directions est droit. On obtient, de cette manière, les trois équations suivantes :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &(ap + bq + cr)\,\Delta a + (a'p + b'q + c'r)\,\Delta a' \\ &\qquad + (a''p + b''q + c''r)\,\Delta a'' = 0, \\ &(ap + bq + cr)\,\Delta b + (a'p + b'q + c'r)\,\Delta b' \\ &\qquad + (a''p + b''q + c''r)\,\Delta b'' = 0, \\ &(ap + bq + cr)\,\Delta c + (a'p + b'q + c'r)\,\Delta c' \\ &\qquad + (a''p + b''q + c''r)\,\Delta c'' = 0. \end{aligned}\right.$$

221. *Directions sur lesquelles les projections de tous les déplacements sont égales.* — Nous avons déjà reconnu que les projections de tous les déplacements sur l'axe sont égales; il n'est pas inutile de montrer comment cette question pourrait être traitée directement.

Soient λ, μ, ν les angles que forme avec les axes x', y', z' une direction jouissant de cette propriété. Les composantes du déplacement d'un point quelconque, parallèlement aux mêmes axes, étant

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &a\,\Delta x + a'\Delta y + a''\Delta z, \\ &b\,\Delta x + b'\Delta y + b''\Delta z, \\ &c\,\Delta x + c'\Delta y + c''\Delta z, \end{aligned}\right.$$

la projection de ce déplacement sur la direction dont il s'agit, sera

$$\begin{aligned} &(a\,\Delta x + a'\,\Delta y + a''\,\Delta z)\cos\lambda + (b\,\Delta x + b'\,\Delta y + b''\,\Delta z)\cos\mu \\ &\qquad + (c\,\Delta x + c'\,\Delta y + c''\,\Delta z)\cos\nu, \end{aligned}$$

et il faut déterminer $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ de telle sorte, que cette quantité soit constante, quelles que soient les valeurs données aux quantités x', y', z'. Or il est nécessaire et suf-

fisant pour cela que les coefficients de ces trois variables indépendantes, dans l'expression ci-dessus, soient nuls quand on y remplacera Δx, Δy, Δz par leurs valeurs données par les équations (2). On trouve ainsi les trois équations

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &(a\Delta a + a'\Delta a' + a''\Delta a'')\cos\lambda + (b\Delta a + b'\Delta a' + b''\Delta a'')\cos\mu \\ &\qquad + (c\Delta a + c'\Delta a' + c''\Delta a'')\cos\nu = 0, \\ &(a\Delta b + a'\Delta b' + a''\Delta b'')\cos\lambda + (b\Delta b + b'\Delta b' + b''\Delta b'')\cos\mu \\ &\qquad + (c\Delta b + c'\Delta b' + c''\Delta b'')\cos\nu = 0, \\ &(a\Delta c + a'\Delta c' + a''\Delta c'')\cos\lambda + (b\Delta c + b'\Delta c' + b''\Delta c'')\cos\mu \\ &\qquad + (c\Delta c + c'\Delta c' + c''\Delta c'')\cos\nu = 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations déterminent les rapports des trois quantités $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$. Or il est facile de voir que ces rapports sont précisément ceux des quantités p, q, r; car, si l'on remplace les premières par les secondes dans les dernières équations, elles deviennent des identités en vertu des équations (12). Donc la direction unique déterminée par les équations (14) coïncide avec celle de l'axe de rotation; ce qu'il s'agissait de vérifier.

Tous les déplacements ayant des projections égales sur l'axe, il s'ensuit que des déplacements faisant avec l'axe des angles égaux différents d'un angle droit sont égaux, et réciproquement. Cette condition renferme le cas de déplacements parallèles.

222. *Équations de l'axe de rotation et de glissement.* — Les points de cet axe se distinguent de tous les autres par cette propriété, que leurs déplacements sont parallèles à la direction de cette même ligne. Or les cosinus des angles que fait avec les axes XYZ la direction du déplacement d'un point quelconque, sont proportionnels à Δx, Δy, Δz; et ceux des angles que fait l'axe de rotation avec ces mêmes axes sont proportionnels à

$$ap + bq + cr, \quad a'p + b'q + c'r, \quad a''p + b''q + c''r.$$

Les points de l'axe cherché sont donc déterminés par les équations

$$(13)\quad \frac{\Delta x}{ap + bq + cr} = \frac{\Delta y}{a'p + b'q + c'r} = \frac{\Delta z}{a''p + b''q + c''r};$$

et si l'on y remplace Δx, Δy, Δz par leurs valeurs données par les équations (2), on aura deux équations du premier degré entre x', y', z', et les données, qui représenteront la droite cherchée rapportée aux axes $X'Y'Z'$. Nous allons réduire ces équations à l'expression la plus simple; pour cela, nous commencerons par mettre les précédentes sous cette forme,

$$\frac{(a + \frac{1}{2}\Delta a)\Delta x}{(a + \frac{1}{2}\Delta a)(ap + bq + cr)} = \frac{(a' + \frac{1}{2}\Delta a')\Delta y}{(a' + \frac{1}{2}\Delta a')(a'p + b'q + c'r)}$$
$$= \frac{(a'' + \frac{1}{2}\Delta a'')\Delta z}{(a'' + \frac{1}{2}\Delta a'')(a''p + b''q + c''r)}.$$

En ajoutant les numérateurs entre eux ainsi que les dénominateurs, on aura encore une fraction égale. La somme des dénominateurs, en vertu des équations (12) se réduira à p. La somme des numérateurs sera, d'après les équations (2), $h + qz' - ry'$, en posant

$$(a + \tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta\xi + (a' + \tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta\eta + (a'' + \tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta\zeta = h.$$

Les fractions (13) sont donc égales à $\dfrac{h + qz' - ry'}{p}$.

En faisant relativement aux lettres b et c des calculs analogues à ceux que nous venons de faire relativement à a, on trouvera que les fractions (13) sont égales aux nouvelles expressions

$$\frac{i + rx' - pz'}{q}, \quad \frac{k + py' - qx'}{r},$$

les quantités h, i, k étant déterminées par les équations

suivantes :

$$h = (a + \tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta\xi + (a' + \tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta\eta + (a'' + \tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta\zeta,$$
$$i = (b + \tfrac{1}{2}\Delta b)\Delta\xi + (b' + \tfrac{1}{2}\Delta b')\Delta\eta + (b'' + \tfrac{1}{2}\Delta b'')\Delta\zeta,$$
$$k = (c + \tfrac{1}{2}\Delta c)\Delta\xi + (c' + \tfrac{1}{2}\Delta c')\Delta\eta + (c'' + \tfrac{1}{2}\Delta c'')\Delta\zeta.$$

Les équations de l'axe seront donc

$$\frac{h + qz' - ry'}{p} = \frac{i + rx' - pz'}{q} = \frac{k + py' + qx'}{r}.$$

Ces fractions sont égales à celle que l'on obtiendrait en multipliant les deux termes de la première par p, de la seconde par q, de la troisième par r, et ajoutant termes à termes ces nouvelles fractions ; ce qui donne

$$\frac{ph + qi + rk}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Or, d'après les valeurs de h, i, k, on trouve, en tenant compte des équations (11),

$$ph + qi + rk = (ap + bq + cr)\Delta\xi + (a'p + b'q + c'r)\Delta\eta$$
$$+ (a''p + b''q + c''r)\Delta\zeta.$$

Mais le second membre de cette équation, divisé par $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, serait la projection du déplacement de l'origine sur la direction de l'axe de rotation. Si donc on désigne cette projection constante par υ, on aura

$$ph + qi + rk = \upsilon\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Les équations des projections de l'axe sur les trois plans coordonnés X' Y' Z' seront donc

$$\frac{h + qz' - ry'}{p} = \frac{i + rx' - pz'}{q} = \frac{k + py' - qx'}{r} = \frac{\upsilon}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

ou enfin

$$(14)\quad \begin{cases} qz' - ry' = v\dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} - h, \\ rx' - pz' = v\dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} - i, \\ py' - qx' = v\dfrac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} - k. \end{cases}$$

223. Si, dans tous les calculs précédents on suppose les déplacements infiniment petits et exécutés dans un temps Δt tendant vers zéro, tous les accroissements tendront aussi vers zéro, et les équations que nous avons obtenues donneront des relations entre les limites des rapports des accroissements des variables ou entre leurs différentielles. On les déduira des premières en négligeant les infiniment petits du second ordre, et changeant la caractéristique Δ en d. Mais pour que l'homogénéité soit en évidence, p, q, r devenant des quantités infiniment petites, nous les remplacerons, dans les formules précédentes, par pdt, qdt, rdt. Au reste, les équations que nous allons obtenir pourraient être déduites directement des équations (1) par des différentiations et des calculs analogues à ceux que nous avons faits dans le cas des déplacements finis. Les déplacements et leurs composantes Δx, Δy, Δz, étant divisés par Δt, donneront à la limite les vitesses et les composantes des vitesses $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dz}{dt}$; et, comme les vitesses et les déplacements se composent et se décomposent suivant les mêmes règles, on voit sans peine que toutes les propositions trouvées sur les déplacements, étant considérées à la limite, fourniront des propositions analogues sur les vitesses des points du système. Nous allons examiner rapidement ces diverses propositions; mais, auparavant, nous croyons devoir rappeler quelques formules élémentaires que nous

pourrions regarder comme connues, mais dont il importe de fixer le sens avec précision.

Révision de quelques formules élémentaires de géométrie analytique.

224. *Angles formés avec les axes par une droite perpendiculaire sur deux autres.* — Soient $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')$ les angles formés par les directions des droites données avec les axes positifs des x, y, z; et λ, μ, ν les angles que forme avec ces mêmes axes la direction de la perpendiculaire; on aura les deux conditions

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$
$$\cos\alpha'\cos\lambda + \cos\beta'\cos\mu + \cos\gamma'\cos\nu = 0.$$

Ces deux équations déterminent les rapports des trois cosinus inconnus, et donnent

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu :: \cos\beta'\cos\gamma - \cos\gamma'\cos\beta$$
$$: \cos\gamma'\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\gamma : \cos\alpha'\cos\beta - \cos\beta'\cos\alpha;$$

et comme la somme des carrés des trois cosinus est égale à l'unité, on aura, en posant d'abord

$$(\cos\beta'\cos\gamma - \cos\gamma'\cos\beta)^2 + (\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\gamma)^2$$
$$+ (\cos\alpha'\cos\beta - \cos\beta'\cos\alpha)^2 = D^2,$$

$$\cos\lambda = \frac{\cos\beta'\cos\gamma - \cos\gamma'\cos\beta}{\pm D},$$

$$\cos\mu = \frac{\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\gamma}{\pm D},$$

$$\cos\nu = \frac{\cos\alpha'\cos\beta - \cos\beta'\cos\alpha}{\pm D},$$

le dénominateur devant être pris avec le même signe pour les trois cosinus, qui doivent être dans le même rapport que leurs numérateurs. Quant à la valeur de D^2, elle peut

se mettre sous la forme

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') \\ - (\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')^2;$$

elle est donc égale à

$$1 - \cos^2 V \quad \text{ou} \quad \sin^2 V,$$

V étant l'angle des deux droites; on a donc

$$\cos\lambda = \pm\frac{1}{\sin V}(\cos\beta'\cos\gamma - \cos\gamma'\cos\beta),$$

$$\cos\mu = \pm\frac{1}{\sin V}(\cos\gamma'\cos\alpha - \cos\alpha'\cos\gamma),$$

$$\cos\nu = \pm\frac{1}{\sin V}(\cos\alpha'\cos\beta - \cos\beta'\cos\alpha).$$

On trouve ainsi deux directions opposées; et, en effet, rien jusqu'ici n'a déterminé lequel des deux sens on voulait considérer sur la perpendiculaire.

225. *Distinction du sens de la perpendiculaire à deux directions.*—Concevons par l'origine deux droites parallèles aux directions déterminées par les angles $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')$; prenons sur la première un point quelconque : ses coordonnées x, y, z seront proportionnelles aux cosinus des angles α, β, γ, et, respectivement, de mêmes signes : par ce point, menons une parallèle à la direction déterminée par les angles α', β', γ', et concevons un point en mouvement sur cette dernière direction. Le rayon vecteur mené de l'origine à ce point partira de la direction $(\alpha\beta\gamma)$ et ira en se rapprochant de la direction $(\alpha'\beta'\gamma')$ qui passe aussi par l'origine.

Supposons maintenant un observateur placé dans la perpendiculaire au plan des deux droites, les pieds appuyés sur ce plan; le mouvement du rayon vecteur lui paraîtra s'exécuter de gauche à droite ou de droite à gauche, suivant qu'il sera placé d'un côté ou de l'autre du plan. Nous

avons distingué ces deux sens en appelant *direct* celui où le mouvement s'effectue de gauche à droite, et *rétrograde* celui où il s'effectue de droite à gauche; et nous nommons *direction de l'axe du plan* des deux droites dans lequel s'effectue le mouvement, celle de la perpendiculaire dans le sens pour lequel ce mouvement est direct.

Les valeurs des cosinus des angles λ, μ, ν que fait la perpendiculaire avec les axes de coordonnées sont, d'après la formule précédente, dans laquelle on remplacera $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$, par x, y, z,

$$\cos\lambda = \frac{y\cos\gamma' - z\cos 6'}{\pm p},$$

$$\cos\mu = \frac{z\cos\alpha' - x\cos\gamma'}{\pm p},$$

$$\cos\nu = \frac{x\cos 6' - y\cos\alpha'}{\pm p},$$

la valeur de p étant

$$\sqrt{(y\cos\gamma' - z\cos 6')^2 + (z\cos\alpha' - x\cos\gamma')^2 + (x\cos 6' - y\cos\alpha')^2};$$

de sorte que p n'est autre chose que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite menée par le point x, y, z, dans la direction $(\alpha' 6' \gamma')$. Il ne s'agit plus que de savoir quel est le signe qu'il faut donner à p pour que les angles λ, μ, ν se rapportent à la direction de l'axe du plan, telle que nous l'avons définie. Remarquons d'abord que si dans un plan de direction quelconque, que nous ferons passer, pour plus de simplicité, par l'origine, un rayon vecteur se meut autour de ce dernier point dans un certain sens, et que l'on considère la projection mobile de ce rayon vecteur sur un autre plan; l'axe de ce dernier mouvement sera celui des deux directions de la perpendiculaire à ce nouveau plan qui fera un angle aigu avec la direction de l'axe du premier mouvement.

Cela posé, considérons d'abord la projection du rayon vecteur sur le plan XY, et désignons par θ l'angle que sa direction forme avec celle des x positifs, de telle sorte que l'axe positif des y corresponde à $\theta = \frac{\pi}{2}$. Le mouvement sera direct relativement à l'axe des z positifs, si θ va en croissant; et, dans le cas contraire, il sera direct par rapport à l'axe des z négatifs. Et l'on sait d'ailleurs qu'un angle croît ou décroît toujours en même temps que la valeur algébrique de sa tangente.

Or la projection sur XY du rayon vecteur mené au point (x, y, z) fait avec l'axe des x un angle dont la tangente a pour expression générale $\frac{y}{x}$. Si le point x, y, z s'avance dans la direction $(\alpha' \beta' \gamma')$ d'une quantité quelconque m, cette tangente devient

$$\frac{y + m\cos\beta'}{x + m\cos\alpha'};$$

son accroissement est donc

$$\frac{m(x\cos\beta' - y\cos\alpha')}{x^2 + mx\cos\alpha'};$$

et, comme on peut supposer m assez petit pour que le dénominateur soit positif, le signe de cet accroissement sera le même que celui du numérateur, ou de $x\cos\beta' - y\cos\alpha'$.

Ainsi, la projection du rayon vecteur sur XY aura un mouvement dont l'axe sera l'axe des z positifs, si l'on a

$$x\cos\beta' - y\cos\alpha' > 0;$$

et, par suite, l'axe du mouvement dans l'espace et l'axe des z positifs feront un angle aigu. De même, les projections sur YZ auront un mouvement direct par rapport aux

axes des x et des y positifs, si l'on a

$$y\cos\gamma' - z\cos\beta' > 0, \quad z\cos\alpha' - x\cos\gamma' > 0.$$

Dans le cas où une de ces inégalités serait de sens contraire, il serait direct par rapport à l'axe négatif, et l'axe du mouvement ferait un angle obtus avec l'axe positif correspondant.

On voit donc que les cosinus des angles que fait l'axe du mouvement que nous considérons, avec les axes positifs x, y, z, sont de mêmes signes respectivement que les numérateurs des valeurs trouvées précédemment; que, par conséquent, on doit prendre p positivement; ce qui donne les formules suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{y\cos\gamma' - z\cos\beta'}{p}, \\[2ex] \cos\mu = \dfrac{z\cos\alpha' - x\cos\gamma'}{p}, \\[2ex] \cos\nu = \dfrac{x\cos\beta' - y\cos\alpha'}{p}. \end{cases}$$

Si maintenant on remplace x, y, z par les quantités proportionnelles, et respectivement de mêmes signes, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{1}{\sin V}(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta'), \\[2ex] \cos\mu = \dfrac{1}{\sin V}(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma'), \\[2ex] \cos\nu = \dfrac{1}{\sin V}(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'), \end{cases}$$

V désignant encore l'angle des deux directions.

Ces formules se rapportent à l'axe du mouvement exécuté dans le plan des deux directions (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$

par un rayon vecteur tournant autour de leur point de rencontre, en partant de la première et se rapprochant de la seconde. Si l'on faisait une construction analogue, en substituant chacune des deux directions à l'autre, on aurait un mouvement en sens inverse; et, en effet, les formules précédentes des cosinus changeraient évidemment de signe sans changer de valeur absolue.

Si les deux directions données étaient rectangulaires, on aurait

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta', \\ \cos\mu = \cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma', \\ \cos\nu = \cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha'. \end{cases}$$

226. Si l'on prend, à partir de l'origine, une longueur q sur la direction α', β', γ', on aura, en désignant par x', y', z' les coordonnées de son extrémité,

$$x' = q\cos\alpha', \quad y' = q\cos\beta', \quad z' = q\cos\gamma';$$

et les formules (1) deviennent

$$yz' - zy' = pq\cos\lambda, \quad zx' - xz' = pq\cos\mu, \quad xy' - yx' = pq\cos\nu.$$

Or, d'après ce que représente p, pq est l'aire du parallélogramme construit sur les deux droites menées de l'origine aux points xyz, $x'y'z'$. Désignant cette aire par P, on donc aura les trois équations suivantes :

$$(4)\quad P\cos\lambda = yz' - zy', \quad P\cos\mu = zx' - xz', \quad P\cos\nu = xy' - yx',$$

λ, μ, ν se rapportant à l'axe de l'aire décrite par un rayon vecteur passant par l'origine et marchant de xyz vers $x'y'z'$ par le plus court chemin. Et, si sur la direction de cet axe on prend une longueur qui représente l'aire P, ces dernières expressions représentent en grandeur et en signe les projections de cette longueur sur les axes des coordonnées.

227. *Formules pour la transformation des coordonnées.* — Proposons-nous de passer d'un système de coordonnées rectangulaires x, y, z à un système quelconque de coordonnées obliques x', y', z' ayant même origine; et supposons, comme nous le ferons toujours, que la disposition des axes soit telle que, si un rayon vecteur se meut autour de l'origine dans les trois angles des axes positifs, en partant de l'axe des x, et marchant vers l'axe des y, puis vers celui des z pour revenir à l'axe des x, les directions des axes positifs soient respectivement les axes de ces trois mouvements. Soient a, a', a'' les cosinus des angles que la direction des x' positifs fait avec les directions respectives des x, y, z positifs; b, b', b'' les cosinus relatifs à la direction des y' positifs; et c, c', c'' ceux qui se rapportent à la direction des z' positifs.

Considérons un point quelconque M (*fig.* 52), dont les trois coordonnées x', y', z' soient représentées par AP, PQ, QM; abaissons $\mathrm{MR} = x$, perpendiculaire sur YZ, et joignons RA. Ce polygone fermé étant supposé projeté sur AX, donnera

$$ax' + by' + cz' - x = 0,$$

pourvu que les quatre coordonnées x', y', z', x soient positives. Si l'une quelconque d'entre elles, par exemple y', était négative, le côté du polygone qui doit être pris en valeur absolue serait $-y'$; mais, comme il serait alors parcouru dans le sens des y' négatifs, le cosinus qui le multiplie changerait de signe et serait $-b$; le terme que l'on doit écrire est donc toujours by', et l'équation est générale, en regardant comme négatives les coordonnées dirigées en sens contraires des axes déterminés par les cosinus donnés.

On trouverait deux autres équations analogues, en considérant les coordonnées y et z. Les équations générales de

transformation seront donc

$$(1)\quad \begin{cases} x = ax' + by' + cz', \\ y = a'x' + b'y' + c'z', \\ z = a''x' + b''y' + c''z', \end{cases}$$

et l'on aura les conditions nécessaires

$$(2)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1; \end{cases}$$

si les nouveaux axes étaient rectangulaires, on aurait de plus

$$(3)\quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, \end{cases}$$

de sorte qu'on ne pourrait prendre arbitrairement que trois des neuf quantités a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''.

Les deux systèmes étant rectangulaires, on peut passer du second au premier par des formules semblables; de sorte que les équations (1), (2), (3) entraînent les suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} x' = ax + a'y + a''z, \\ y' = bx + b'y + b''z, \\ z' = cx + c'y + c''z; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, ces équations entraîneraient les pre-

mières; et les deux systèmes (1), (2), (3), et (4), (5), (6) sont, par conséquent, identiques.

Les quantités abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ satisfont à d'autres relations importantes, qui pourraient se déduire des précédentes, en laissant d'abord une ambiguïté qu'on ne fait disparaître qu'avec un peu de peine. Nous allons montrer comment on peut les obtenir d'une manière beaucoup plus simple, et sans aucune incertitude sur les signes.

Nous remarquerons d'abord qu'il y a deux suppositions à faire sur l'ordre des axes positifs des deux systèmes de coordonnées, qui sont désignés par les mêmes lettres. S'ils sont dans le même ordre, on pourra faire coïncider les directions des x', y', z' respectivement avec celles des x, y, z positifs. S'ils sont en ordre inverse, lorsque les directions des x' et des y' seront amenées à coïncider avec celles des x et des y positifs, les directions des z' et des z positifs seront directement opposées.

L'axe des x' étant perpendiculaire au plan des axes des y' et des z', les angles qu'il fait avec les trois axes des x, y, z se détermineront d'après les formules (3) du n° 225; il faudra d'ailleurs s'assurer si les axes des x', y', z' sont dans le même ordre que les premiers. Dans cette hypothèse, l'axe des x' positifs est l'axe relatif au mouvement d'un rayon vecteur partant de AY' et se rapprochant de AZ'; les angles α, β, γ des formules (3) se rapportent donc à AY', et ont pour cosinus b, b', b''; α', β', γ' se rapportent à AZ', et leurs cosinus sont c, c', c''; ce serait l'inverse si l'ordre des trois axes était inverse.

Si donc on remplace, dans les formules (3), $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, par a, a', a'', on aura, dans l'hypothèse d'une disposition semblable dans les deux systèmes d'axes,

$$a = b'c'' - c'b'', \quad a' = cb'' - bc'', \quad a'' = bc' - cb',$$

et, dans le cas d'une disposition inverse.

$$a = c'b'' - b'c'', \quad a' = bc'' - cb'', \quad a'' = cb' - bc',$$

équations qui ne diffèrent des premières que par le changement de signe des seconds membres.

En agissant de la même manière pour les axes des y' et des z', on aura des équations semblables; de sorte que les neuf quantités abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ sont liées par les relations suivantes, dans le cas où la disposition des deux systèmes d'axes est la même :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a = b'c'' - c'b'', & a' = cb'' - bc'', & a'' = bc' - cb', \\ b = c'a'' - a'c'', & b' = ac'' - ca'', & b'' = ca' - ac', \\ c = a'b'' - b'a'', & c' = ba'' - ab'', & c'' = ab' - ba'. \end{array} \right.$$

Dans le cas où la disposition des axes serait inverse, il faudrait changer les signes des seconds membres de ces neuf équations.

228. Les nouveaux axes x', y', z', au lieu d'être déterminés par neuf quantités entre lesquelles il existe six relations, pourraient l'être par trois seulement, et nous allons faire connaître les formules données à cet effet par Euler.

Nous supposerons que les nouveaux axes aient la même disposition que les premiers, et nous les déterminerons en donnant l'angle ψ (*fig.* 53) que forme avec l'axe des x positifs la trace AR du plan Y'X' sur XY; l'angle θ que forme le plan X'Y' avec XY, qui est aussi celui des axes AZ, AZ'; et enfin l'angle φ que forme AX' avec AR; mais il est essentiel d'indiquer avec précision le sens dans lequel chacun de ces angles est estimé.

Nous compterons l'angle ψ dans le sens du mouvement direct de AX vers AY, et il pourra varier de 0 à 2π; mais à laquelle des deux directions opposées AR, AR' se rapportera-t-il? Pour la déterminer, concevons un mouvement

direct autour de AZ qui amène AX en AR et AY en AY_1; puis un mouvement direct autour de AR qui amène AZ à coïncider avec AZ′, ce qui aura lieu, ou lorsque le système aura tourné de l'angle θ, qu'on supposera toujours moindre que π, ou lorsqu'il aura tourné de $2\pi - \theta$; or il n'y a qu'une des deux directions AR, AR′ pour laquelle l'angle de rotation soit θ, et c'est celle-là que nous choisissons pour la détermination de l'angle ψ.

On voit, d'après cela, qu'on passerait des premiers axes aux nouveaux, en faisant tourner, dans le sens direct, le système des premiers d'un angle ψ autour de AZ; les faisant tourner ensuite d'un angle θ autour de AR, et enfin d'un angle φ autour de AZ′. Après le premier mouvement, les axes seront dans la position AR, AY_1, AZ, et nous désignerons par x_1, y_1, z les coordonnées comptées sur leurs directions. Après ce second mouvement, ils ont la position AR, AY_2, AZ′, et nous désignerons par x_1, y_2, z' les coordonnées correspondantes. Enfin, après le troisième mouvement, ils coïncideront avec les axes AX′, AY′, AZ′, pour lesquels les coordonnées sont x', y', z'.

Nous pourrons ainsi passer des premiers axes aux nouveaux au moyen de trois transformations dans lesquelles un axe étant immobile, on n'a besoin de faire usage que de la transformation des coordonnées dans un plan.

Or on sait que, pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires u, v à un système rectangulaire u', v' semblablement disposé, c'est-à-dire tel, que quand la direction des u' positifs coïncide avec celle des u positifs, il en soit de même des directions des v et v' positifs, on a les deux formules

$$u = u' \cos\alpha - v' \sin\alpha,$$
$$v = u' \sin\alpha + v' \cos\alpha,$$

α désignant l'angle dont il faut faire tourner l'axe des u

dans le sens de u vers v pour qu'il coïncide avec l'axe des u' positifs. Ces formules varieraient dans les signes si la disposition des axes était inverse. D'après cela, on aura les équations suivantes :

$$x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi,\quad y_1 = y_2 \cos\theta - z' \sin\theta,\quad x_1 = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$

$$y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi,\quad z = y_2 \sin\theta + z' \cos\theta,\quad y_2 = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$$

Éliminant les intermédiaires x_1, y_1, y_2, on obtient les formules cherchées :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} x &= x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad + y'(-\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta) + z'\sin\psi\sin\theta, \\ y &= x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) \\ &\quad + y'(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta) - z'\cos\psi\sin\theta, \\ z &= x'\sin\theta\sin\varphi + y'\cos\varphi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

La comparaison des formules (1) et (8) conduit aux équations suivantes, qui ont la même généralité que celles d'où on les déduit :

$$\begin{aligned} a &= -\sin\varphi\sin\psi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi, \\ b &= -\cos\varphi\sin\psi\cos\theta - \sin\varphi\cos\psi, \\ c &= \sin\theta\sin\psi, \\ a' &= \sin\varphi\cos\psi\cos\theta + \cos\varphi\sin\psi, \\ b' &= \cos\varphi\cos\psi\cos\theta - \sin\varphi\sin\psi, \\ c' &= -\sin\theta\cos\psi; \end{aligned}$$

$$a'' = \sin\theta\sin\varphi,\quad b'' = \sin\theta\cos\varphi,\quad c'' = \cos\theta.$$

Ces équations entraînent les suivantes, qu'il est bon de noter :

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a''}{b''},\quad \operatorname{tang}\psi = -\frac{c}{c'}.$$

Du mouvement infiniment petit d'un système rigide.

229. En différentiant les équations (1) du n° 214 par rapport à t, et supposant x', y', z' constants, on obtient

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt} + x'\dfrac{da}{dt} + y'\dfrac{db}{dt} + z'\dfrac{dc}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} + x'\dfrac{da'}{dt} + y'\dfrac{db'}{dt} + z'\dfrac{dc'}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d\zeta}{dt} + x'\dfrac{da''}{dt} + y'\dfrac{db''}{dt} + z'\dfrac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Ce sont les valeurs des composantes parallèles X, Y, Z de la vitesse d'un point quelconque du système ayant pour coordonnées invariables x', y', z' par rapport aux axes X′, Y′, Z′.

On les obtiendrait en divisant les équations (2) du même numéro par Δt, et passant à la limite des rapports lorsque Δt tend vers zéro.

230. *Composantes de la vitesse dans le sens des axes mobiles.* — En multipliant les seconds membres des équations (1), respectivement par a, a', a'', et les ajoutant, on aura la composante de la vitesse dans le sens des x'; on aura, de même, les composantes dans le sens des y' et des z'. Désignons-les par u, v, w, et soient h, i, k les composantes de la vitesse de l'origine mobile, suivant ces mêmes directions; c'est-à-dire posons

$$(2)\quad \begin{cases} a\dfrac{d\xi}{dt} + a'\dfrac{d\eta}{dt} + a''\dfrac{d\zeta}{dt} = h, \\ b\dfrac{d\xi}{dt} + b'\dfrac{d\eta}{dt} + b''\dfrac{d\zeta}{dt} = i, \\ c\dfrac{d\xi}{dt} + c'\dfrac{d\eta}{dt} + c''\dfrac{d\zeta}{dt} = k, \end{cases}$$

nous trouverons

$$(3)\qquad \begin{cases} u = h + qz' - ry', \\ v = i + rx' - pz', \\ w = k + py' - qx', \end{cases}$$

p, q, r étant donnés par les équations

$$pdt = cdb + c'\,db' + c''\,db'',$$
$$qdt = adc + a'\,dc' + a''\,dc'',$$
$$rdt = bda + b'da' + b''da'',$$

Les premiers termes h, i, k sont les composantes de la vitesse du mouvement commun de translation ; de sorte que les composantes dues au mouvement de rotation autour de l'origine supposée immobile, sont

$$qz' - ry', \quad rx' - pz', \quad py' - qx'.$$

231. *Axe instantané de rotation.* — Les points dont la vitesse est nulle dans le mouvement autour de l'origine supposée fixe, seront donnés par les trois équations suivantes, qui se réduisent à deux :

$$(4)\qquad qz' - ry' = 0, \quad rx' - pz' = 0, \quad py' - qx' = 0.$$

Ils forment une droite qui passe par l'origine, et qui fait avec les axes x', y', z' des angles dont les cosinus sont

$$(5)\qquad \frac{\pm p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{\pm q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{\pm r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

les signes supérieurs ou inférieurs devant être pris ensemble.

On la nomme *axe instantané de rotation*, parce qu'on peut supposer que le mouvement s'effectue autour d'elle pendant un temps infiniment petit ; les erreurs qui en résultent n'étant que des infiniment petits du second ordre, pour les points situés à une distance finie de cet axe.

Il résulte de là que *tout mouvement infiniment petit autour d'un point fixe peut être considéré comme ayant lieu autour d'un axe passant par ce point.*

Et, par conséquent,

Tout mouvement infiniment petit d'un corps peut être considéré comme résultant d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

232. *Expression de la vitesse angulaire.* — Dans ce mouvement autour d'un axe fixe, la vitesse angulaire est égale à la vitesse d'un point quelconque, divisé par la distance de ce point à l'axe. Si l'on choisit à cet effet le point situé sur l'axe z' à la distance 1 de l'origine, ses coordonnées seront

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 1;$$

les composantes de sa vitesse, parallèlement à ces axes, seront, d'après les formules précédentes, q, $-p$, 0; sa vitesse sera donc $\sqrt{p^2 + q^2}$. Sa distance à l'axe sera le sinus de l'angle de cet axe et de l'axe z', ou $\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$. Donc la vitesse angulaire ω aura pour valeur

$$(6) \qquad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

233. *Sens de la rotation.* — Il reste à déterminer le sens de la rotation du système, ou, ce qui est la même chose, le sens de la rotation qui s'effectue dans un plan quelconque perpendiculaire à l'axe. Il suffit, pour cela, de reconnaître si la direction de l'axe de cette rotation correspond aux signes supérieurs ou aux signes inférieurs des expressions (5). Nous considérerons, à cet effet, le plan mené par l'origine perpendiculairement à l'axe, et nous allons chercher la direction de l'axe de la rotation effectuée dans ce plan par la droite menée de l'origine à l'un quel-

conque des points de ce plan, ayant pour coordonnées $x'y'z'$. Ce point, à partir d'une quelconque de ses positions, se meut dans la direction de sa vitesse, qui fait avec les axes X′Y′Z′ des angles dont les cosinus sont proportionnels à u, v, w; de sorte que, pour avoir l'axe de la rotation du rayon mené de l'origine à ce point, il suffit de recourir aux formules (2) du n° 225, en remplaçant la direction $(\alpha\beta\gamma)$ par celle du rayon, et la direction $(\alpha'\beta'\gamma')$ par celle de la vitesse. D'où il suit que les cosinus des angles que fait la direction de l'axe de la rotation avec celles des x', y', z' seront de mêmes signes que les expressions

$$y'w - z'v, \quad z'u - x'w, \quad x'v - y'u;$$

et il n'y a plus qu'à reconnaître si les signes de ces expressions sont les mêmes que ceux de p, q, r, ou contraires.

Nous prendrons, pour plus de simplicité, $z' = 0$; d'où résulte

$$u = -ry', \quad v = rx';$$

et la troisième expression devient

$$r(x'^2 + y'^2).$$

Elle est donc de même signe que r; et, par conséquent, ce sont les signes supérieurs qui doivent être pris dans les expressions (5).

Ainsi les cosinus des angles formés avec les axes X′Y′Z′, par la direction de l'axe de rotation, sont en grandeur et en signes

$$(7)\qquad \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

En multipliant la vitesse angulaire $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ par ces trois cosinus, on aura ses *composantes* suivant les axes

X', Y', Z. Leurs valeurs en grandeur et en signes seront donc

$$(8) \qquad p, \quad q, \quad r.$$

234. *Axe instantané de glissement et de rotation.* — La proposition établie dans le n° 219 ayant lieu pour tout mouvement du corps, aura lieu lorsque ce mouvement sera infiniment petit; et l'on retrouve cette proposition, démontrée d'abord géométriquement :

Tout mouvement infiniment petit d'un corps peut être produit par un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, suivi ou précédé d'un mouvement commun de glissement le long du même axe.

Cet axe instantané de glissement et de rotation peut encore être envisagé autrement. En substituant, comme nous l'avons déjà dit, aux espaces infiniment petits parcourus par les points du système dans un même temps, les vitesses mêmes de ces points, on a l'énoncé suivant :

Les vitesses de tous les points d'un corps à un instant quelconque peuvent être considérées comme résultant de la composition de vitesses égales et parallèles à une même droite, et des vitesses qu'auraient ces points dans un certain mouvement de rotation autour d'un axe parallèle à cette même droite.

La composante parallèle à l'axe n'est autre chose que la projection de la vitesse de l'origine mobile sur l'axe; la vitesse angulaire du mouvement de rotation est $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$; et la direction de cet axe est celle qui fait avec les axes des x', y', z' des angles dont les cosinus sont proportionnels à p, q, r et de mêmes signes que ces quantités.

235. *Équations de l'axe instantané de glissement et de rotation.* — Les équations de l'axe de glissement et de rotation données, dans le n° 222, pour un mouvement fini quelconque, se changeront dans les équations cher-

chées en divisant les deux membres par Δt et passant aux limites. Les quantités p, q, r se changeront en celles que nous désignons actuellement par ces mêmes lettres; h, i, k deviendront les composantes de la vitesse de l'origine dans le sens des axes X', Y', Z', que nous représentons encore par ces mêmes lettres; enfin, υ, qui représentait le déplacement de l'origine estimé dans le sens de l'axe, deviendra la vitesse de cette origine estimée suivant cette même direction ou la vitesse de glissement. Nous la désignerons par la même lettre, et par υ', υ'', υ''' ses composantes suivant les axes X', Y', Z'. Les équations de l'axe instantané de glissement et de rotation seront donc, par rapport aux axes mobiles,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} qz' - ry' &= \upsilon' - h,\\ rx' - pz' &= \upsilon'' - i,\\ py' - qx' &= \upsilon''' - k.\end{aligned}\right.$$

On aurait les équations de cet axe par rapport aux axes fixes en substituant à x', y', z' leurs valeurs en x, y, z. L'axe est ainsi déterminé à chaque instant par rapport au corps et à la position absolue, en supposant que les quantités ξ, η, ζ, a, b, c, a', etc., soient des fonctions données du temps.

L'équation de la surface, lieu de ces axes par rapport au corps, s'obtiendrait en éliminant le temps entre les trois équations de l'axe en x', y', z', et les équations de la surface, lieu de ces axes dans l'espace, s'obtiendraient en éliminant le temps entre les trois équations de l'axe en x, y, z.

236. *Déplacement virtuel d'un corps solide. Équations d'équilibre.* — Les formules (3) du n° 230, qui expriment les composantes de la vitesse d'un point quelconque d'un corps solide en mouvement, donnent immédiatement les composantes des vitesses virtuelles des divers points de ce corps: et l'application du principe général de la statique

fera connaître les équations nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de forces appliquées à un corps solide entièrement libre. En effet, lorsqu'un système rigide passe d'une position donnée à une autre infiniment voisine, tous les points peuvent être considérés comme décrivant des droites infiniment petites d'un mouvement uniforme et avec des vitesses proportionnelles aux longueurs de ces droites, que l'on a nommées, pour cette raison, *vitesses virtuelles*. Les composantes de ces vitesses virtuelles, ou de ces déplacements virtuels, sont donc les produits du temps θ employé à les parcourir par les composantes de la vitesse données par les formules (3). La somme des moments virtuels des forces ayant pour composantes (X, Y, Z, X', Y', Z', etc.), sera donc

$$\theta\Sigma\left[X(h+qz'-ry')+Y(i+rx'-pz')+Z(k+py'-qx')\right].$$

Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut, d'après le principe des vitesses virtuelles, que cette somme divisée par θ soit nulle, quel que soit le déplacement; c'est-à-dire quelles que soient les six quantités h, i, k, p, q, r, puisque l'on suppose le corps entièrement libre. Il est donc nécessaire et suffisant que les coefficients de chacune de ces indéterminées soient nuls, ce qui donne les équations

$$\Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0;$$
$$\Sigma(y'Z-z'Y)=0,\quad \Sigma(z'X-x'Z)=0,\quad \Sigma(x'Y-y'X)=0.$$

On peut supposer les axes des x', y', z' placés d'une manière quelconque dans l'espace. On peut donc les faire se confondre avec les axes donnés des x, y, z. Les trois dernières équations deviennent alors

$$\Sigma(yZ-zY)=0,\quad \Sigma(zX-xZ)=0,\quad \Sigma(xY-yX)=0.$$

On retrouve ainsi les six équations déjà démontrées n° 50 (*).

(*) On peut consulter, sur le mouvement géométrique d'un corps solide, un Mémoire assez étendu de M. O. Rodriguez, postérieur à celui de M. Poinsot (*voyez* le Journal de M. Liouville, tome V).

CHAPITRE III.

DE LA VITESSE ET DE LA DÉVIATION DANS LE MOUVEMENT COMPOSÉ D'UN POINT.

237. Lorsqu'un point a un certain mouvement continu par rapport à un système rigide, et que ce système a lui-même un mouvement continu dans l'espace, le point est dit avoir un mouvement continu composé des deux autres. Et nous avons remarqué (n° 204), qu'en partant d'une époque quelconque, on aurait la position du point après un temps quelconque, en laissant se mouvoir le système pendant ce temps, le point y occupant toujours la même position; puis faisant mouvoir le point dans ce système immobile pendant ce même temps, de manière à y prendre la position relative qu'il doit avoir. On pourrait aussi commencer par faire mouvoir le point dans le système laissé immobile, puis donner au système le mouvement qu'il doit avoir pendant le même temps, le point y conservant toujours la même position relative.

La manière la plus commode de déterminer ces deux mouvements consiste à prendre trois axes rectangulaires liés invariablement au système. La position relative du point se détermine par ses coordonnées par rapport à ces axes, et le mouvement du système par les positions successives de ces mêmes axes. Si l'on connaît les deux mouvements composants, les coordonnées du point par rapport aux axes mobiles sont des fonctions connues du temps, ainsi que les coordonnées de l'origine mobile et les inclinaisons de ces axes sur des axes fixes.

Cela posé, nous allons chercher comment on peut déterminer, dans le mouvement résultant, ou composé, du point, les deux éléments importants que nous avons considérés dans

le mouvement en général, savoir, la vitesse et la déviation.

238. *Vitesse dans le mouvement composé.*—Soient M la position du point à une certaine époque; MU la trajectoire du point du système qui coïncide avec M à cette époque; M_1 la position de ce point après un temps infiniment petit θ; M_1V la position qu'occupe après ce temps la ligne liée au système rigide et sur laquelle reste le point mobile, autrement dit la trajectoire relative; M_1M' l'arc que ce point a parcouru sur cette courbe, depuis l'époque où M_1 était en M, c'est-à-dire pendant le temps θ. M′ sera la position du mobile après ce temps, et sa trajectoire absolue sera une ligne MM′T passant par M et M′.

Si maintenant on joint les points $MM'M_1$ par des droites, et que l'on fasse tendre θ vers zéro, ces droites auront pour limites de leurs directions les tangentes aux trois courbes MU, MT et M_1V, cette dernière étant prise dans sa position limite, c'est-à-dire quand M_1 est en M. Les rapports des côtés du triangle $MM'M_1$ auront les mêmes limites que les rapports des arcs MM_1, M_1M', MM′ qui sont parcourus dans le même temps θ, le premier par le point du système qui coïncidait avec le mobile, le second par le mobile dans son mouvement relatif, le troisième par le mobile dans son mouvement composé. Or, si l'on divisait ces trois arcs par θ, les trois quotients auraient pour limites les vitesses dans ces trois mouvements, prises à l'époque où le mobile est en M. Les rapports des côtés du triangle MM_1M' ont donc pour limites les rapports de ces vitesses.

Pour énoncer simplement la solution qui résulte de là pour la question que nous nous proposions, formons le parallélogramme $MM_1M'K$. Le côté MK, parallèle à M_1M', aura pour direction limite celle de la trajectoire relative en M, et le parallélogramme tend à être semblable à un parallélogramme dont les côtés adjacents seraient les tan-

gentes en M à la trajectoire relative du mobile et à la trajectoire du point coïncident du système, et auraient des longueurs proportionnelles aux vitesses de ces points sur ces courbes.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La vitesse du mobile dans son mouvement composé est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du parallélogramme dont les deux côtés adjacents représenteraient, en grandeur et en direction, la vitesse relative du mobile et la vitesse du point coïncident du système.

On peut donc dire, d'après la définition donnée n° 193 de la composition des vitesses, que :

La vitesse, dans le mouvement composé, est la résultante des vitesses dans le mouvement relatif et dans le mouvement du point coïncident du système.

239. *Vitesse relative.* — Soient MUTV (*fig.* 55) le parallélogramme construit sur les lignes MV, MU tangentes en M, la première à la trajectoire relative, la seconde à la trajectoire du point M appartenant au système; les longueurs MV, MU représentant les vitesses sur ces deux trajectoires. Nous venons de voir que la diagonale MT représentera en grandeur et en direction la vitesse du mouvement absolu du point dans l'espace.

Mais si l'on prend sur le prolongement de MU, MU′ égal à MU, MV sera la diagonale du parallélogramme construit sur MU′ et MT. On peut donc énoncer ce théorème :

La vitesse relative d'un point, par rapport à un système rigide en mouvement, est la résultante de sa vitesse absolue et de la vitesse, prise en sens contraire, du point coïncident du système.

240. *Déviation dans le mouvement composé.* — Soient M la position du point mobile à une époque quelconque; MV la ligne sur laquelle il se meut dans le système, ou sa

trajectoire relative; MU la ligne que décrit le point M du système. Supposons qu'après un temps infiniment petit θ le mobile soit en m sur sa trajectoire relative, et le point M du système en M_1. Soient MT, MT_1 les parties des tangentes à ces courbes qui seraient décrites uniformément dans le temps θ avec les vitesses qui ont lieu en M dans les mouvements sur ces courbes.

La déviation dans le mouvement du point, par rapport au système après le temps θ, est Tm; elle est $T_1 M_1$ dans le mouvement du point M du système.

La diagonale MT′ du parallélogramme TMT_1T' donne la direction de la tangente à la courbe décrite par le mobile dans l'espace; et sa grandeur représenterait la vitesse sur cette courbe, si l'on prenait MT, MT_1 pour représenter les vitesses sur les deux autres; et, par conséquent, MT′ est l'espace que décrirait dans le temps θ un point qui se mouvrait sur cette tangente avec la vitesse que le mobile a en M sur sa trajectoire absolue.

Il suit de là que, pour avoir la déviation du mobile dans son mouvement composé ou absolu, il suffit de joindre le point T′ à la position qu'occupe ce mobile après le temps θ sur sa trajectoire absolue, ou, en d'autres termes, à la position qu'il occupe effectivement dans l'espace. Or c'est ce qu'il est très-facile de déterminer d'après ce que nous avons établi précédemment sur le mouvement des systèmes.

Pour cela, nous laisserons d'abord le système immobile pendant le temps θ; le point M arrivera ainsi à la position m dans le système, et nous supposerons qu'il y reste lié fixement. Maintenant, nous laisserons le système se mouvoir comme il doit le faire effectivement pendant le temps θ, et nous décomposerons ce mouvement en une translation commune, qui amène M en M_1, et une rotation autour d'un certain axe M_1I dont la direction, ainsi que l'angle de rotation, ne dépendent que du changement de

direction des lignes du système. Cet axe peut être confondu avec l'axe instantané, lorsque θ est infiniment petit; et l'angle décrit autour de $M_1 I$ peut être considéré comme le produit du temps θ par la vitesse angulaire correspondante à la position M. Or il est facile de suivre le point m, entraîné ainsi par le système auquel il est lié.

En effet, opérons la translation MM_1 au moyen des deux translations MT_1, $T_1 M_1$. Par suite de la première, la droite MT vient en $T_1 T'$; par suite de la seconde, elle vient en $M_1 \mu$, $T' \mu$ étant pris égal et parallèle à $T_1 M_1$. Menant ensuite $\mu\mu'$ parallèle et égal à Tm, μ' sera la position de m après la translation. Effectuant maintenant la rotation autour de $M_1 I$, le point μ' décrira un arc de cercle $\mu' M'$ perpendiculaire au plan $IM_1 \mu'$, et ayant pour rayon la perpendiculaire abaissée de μ' sur l'axe $M_1 I$. Alors toutes les choses se trouvent telles qu'elles doivent être dans le mouvement réel après le temps θ; M' est la position absolue qu'occupera le mobile : et, par conséquent, $T' M'$ est la *déviation* cherchée.

Or, en considérant le polygone fermé $T' \mu\mu' M'$, on voit que la ligne $T' M'$ est la résultante des lignes $T' \mu$, $\mu\mu'$, $\mu' M'$ prises dans les directions suivant lesquelles elles sont décrites en partant de T'. La première n'est autre chose que la déviation $T_1 M_1$, transportée parallèlement à elle-même, sans changer de grandeur ni de sens; la seconde est la déviation Tm, semblablement transportée. Quant à la troisième ligne $\mu' M'$, sa direction a pour limite la perpendiculaire au plan mené par la direction limite de $M_1 I$, qui est celle de l'axe instantané, et par la direction limite de $M_1 \mu'$, qui est celle de $M_1 \mu$, vu que $\mu\mu'$ est un infiniment petit du second ordre, et $M_1 \mu'$ du premier. Ainsi la ligne $\mu' M'$ peut être considérée comme perpendiculaire au plan qui contient des parallèles à l'axe instantané de rotation et à la direction MT de la vitesse relative du mobile.

Il est essentiel de remarquer que le sens de cette direction est celui du mouvement de rotation. De sorte que si on la considérait comme axe d'un mouvement direct de rotation exécuté dans le plan auquel elle est perpendiculaire, le sens de ce mouvement serait de l'axe instantané vers la direction de la vitesse relative.

Il ne reste plus qu'à trouver la mesure de la grandeur $\mu' M'$. Si l'on désigne par ω la vitesse angulaire du système, par v_r la vitesse relative, et par δ l'angle de la direction de cette vitesse avec celle de l'axe instantané, le rayon du cercle décrit par μ' sera $M_1 \mu' \sin \delta$, qu'on pourra remplacer par $M_1 \mu \sin \delta$ ou $\theta v_r \sin \delta$; l'angle au centre sera $\theta\omega$, et l'on aura, par conséquent,

$$\mu' M' = \theta^2 \omega v_r \sin \delta.$$

La question est donc entièrement résolue, et le résultat peut s'énoncer comme il suit :

La déviation dans le mouvement composé d'un point est la résultante de trois lignes. Les deux premières sont les déviations dans le mouvement du point relatif au système, et dans le mouvement du point du système qui coïncide avec ce mobile à l'instant que l'on considère. La troisième est perpendiculaire à un plan parallèle à l'axe instantané du système et à la vitesse relative du point, et dans le sens du mouvement de rotation. En d'autres termes, elle est dans la direction de l'axe du mouvement qui amènerait par le plus court chemin la direction de l'axe instantané vers celle de la vitesse relative du point. La grandeur de cette troisième ligne est le produit du carré du temps infiniment petit que l'on considère par la vitesse angulaire du système, et par la projection de la vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané.

241. Il est bon de remarquer que la vitesse dans le mou-

vement composé ne dépend que des vitesses, du point mobile relativement au système, et du point coïncident du système; tandis que la déviation dans le mouvement composé n'est pas déterminée par celles qui ont lieu dans ces deux mouvements. Il n'en serait ainsi que dans le cas où le mouvement du système se réduirait à une simple translation. S'il y a une rotation, il en résulte une influence qui ne peut plus être négligée, parce qu'elle est du second ordre infinitésimal, et que, dans la mesure de la déviation qui est du second ordre, on ne peut négliger que les quantités d'ordre supérieur au second.

242. *Cas particuliers.* — 1°. Si le mouvement du système se réduit à une translation, suivant une loi quelconque, la vitesse angulaire devient nulle, et la troisième composante disparaît. Dans ce cas, la déviation résulte de la composition de celles qui se rapportent au mouvement relatif et au point appartenant au système.

2°. Si la translation avait lieu dans une direction constante et avec une vitesse constante, la déviation du point du système serait nulle, et, par conséquent, la déviation dont le mouvement absolu du mobile serait identique à celle du mouvement relatif.

3°. Si le mouvement du système se réduit à une rotation autour d'un axe, le point appartenant au système décrit un cercle autour de cet axe. Si l'on suppose, de plus, que le mouvement soit uniforme, la déviation de ce point est dirigée vers le centre de ce cercle, et n'est autre chose que la déviation centripète.

243. *Déviation dans le mouvement relatif.* — On déduit de la proposition précédente un corollaire très-important. Dans tout polygone fermé, un côté quelconque, pouvant être regardé comme la résultante de tous les autres, il s'ensuit que dans le polygone $T'\mu\mu'M'$, la ligne $\mu\mu'$ est la résultante des trois lignes $\mu T'$, $T'M'$, $M'\mu'$, décrites en

partant du point μ. Dans ce mouvement, la déviation $T'M'$ est prise dans sa véritable direction ; mais la déviation T_1M_1 ou $T'\mu$ est en sens inverse, et la direction $M'\mu'$ est opposée à celle que cette même droite avait dans le cas précédent. D'où résulte ce théorème important :

Si un point a un mouvement absolu dans l'espace et que l'on considère son mouvement relatif à un système rigide qui a lui-même un mouvement absolu ; c'est-à-dire si l'on considère la suite des positions que ce point occupe dans ce système, à chaque instant, et qu'un observateur qui croit le système immobile, regarde comme des positions absolues ; la déviation du mouvement sur cette trajectoire apparente, ou relative, est la résultante de trois lignes qui sont : 1° la déviation dans le mouvement absolu ; 2° la déviation, prise en sens contraire, dans le mouvement du point coïncident du système ; 3° une ligne égale au produit du carré de l'intervalle de temps infiniment petit par la vitesse angulaire, et la projection de la vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané. La direction de cette ligne est perpendiculaire à un plan mené par cet axe et la vitesse relative, et dans le sens contraire au mouvement de rotation. En d'autres termes, elle est celle de l'axe de la rotation qui amènerait la direction de la vitesse relative vers celle de l'axe instantané, par le plus court chemin.

Démonstration analytique des propositions précédentes.

244. — Il n'est pas inutile de voir comment le calcul conduit aux propositions que nous venons d'établir.

Considérons trois axes rectangulaires OX', OY', OZ' faisant partie du système rigide en mouvement, et soient ξ, η, ζ, les coordonnées de l'origine O. On aura, entre les coordonnées x', y', z' du point mobile par rapport à ces

axes, et ses coordonnées x, y, z, par rapport à des axes fixes, les équations connues

$$(1)\quad \begin{cases} x = \xi + ax' + by' + cz', \\ y = \eta + a'x' + b'y' + c'z', \\ z = \zeta + a''x' + b''y' + c''z'; \end{cases}$$

on trouve, en les différentiant,

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt} + x'\dfrac{da}{dt} + y'\dfrac{db}{dt} + z'\dfrac{dc}{at} \\ \qquad + a\dfrac{dx'}{dt} + b\dfrac{dy'}{dt} + c\dfrac{dz'}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} + x'\dfrac{da'}{dt} + y'\dfrac{db'}{dt} + z'\dfrac{dc'}{dt} \\ \qquad + a'\dfrac{dx'}{dt} + b'\dfrac{dy'}{dt} + c'\dfrac{dz'}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d\zeta}{dt} + x'\dfrac{da''}{dt} + y'\dfrac{db''}{dt} + z'\dfrac{dc''}{dt} \\ \qquad + a''\dfrac{dx'}{dt} + b''\dfrac{dy'}{dt} + c''\dfrac{dz'}{dt}. \end{cases}$$

Les premiers membres de ces équations sont les composantes de la vitesse absolue du mobile, parallèles aux axes X, Y, Z.

Les quatre premiers termes des seconds membres de ces équations sont les valeurs que prendraient $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ si x', y', z' étaient constants; ils représentent donc les composantes parallèles à X, Y, Z de la vitesse du point du système qui coïncide avec le mobile, à l'instant que l'on considère. Si maintenant on observe que $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ sont les composantes parallèles à X', Y', Z' de la vitesse relative, ou apparente, du mobile dont nous représentons les coordonnées relatives par x', y', z', on reconnaîtra immé-

diatement que les trois derniers termes des formules (2) représentent les composantes de cette vitesse relative, parallèles aux trois axes fixes X, Y, Z. On retombe ainsi sur cette proposition, déjà démontrée géométriquement :

La vitesse dans le mouvement composé d'un point est la résultante de la vitesse de ce point par rapport au système, et de la vitesse du point coïncident du système.

D'où l'on conclut encore que

La vitesse relative du point est la résultante de sa vitesse absolue, et de la vitesse, prise en sens contraire, du point coïncident du système.

245. Différentiant de nouveau les équations (2), nous obtenons

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + x'\frac{d^2a}{dt^2} + y'\frac{d^2b}{dt^2} + z'\frac{d^2c}{dt^2}\right) \\
&\quad + \left(a\frac{d^2x'}{dt^2} + b\frac{d^2y'}{dt^2} + c\frac{d^2z'}{dt^2}\right) \\
&\quad + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dc}{dt}\right), \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + x'\frac{d^2a'}{dt^2} + y'\frac{d^2b'}{dt^2} + z'\frac{d^2c'}{dt^2}\right) \\
&\quad + \left(a'\frac{d^2x'}{dt^2} + b'\frac{d^2y'}{dt^2} + c'\frac{d^2z'}{dt^2}\right) \\
&\quad + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{da'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{db'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dc'}{dt}\right), \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= \left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + x'\frac{d^2a''}{dt^2} + y'\frac{d^2b''}{dt^2} + z'\frac{d^2c''}{dt^2}\right) \\
&\quad + \left(a''\frac{d^2x'}{dt^2} + b''\frac{d^2y'}{dt^2} + c''\frac{d^2z'}{dt^2}\right) \\
&\quad + 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{da''}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{db''}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{dc''}{dt}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on suppose toutes ces expressions multipliées par $\frac{\theta^2}{2}$,

les premiers membres des équations (3) seront les composantes de la déviation, correspondante à l'intervalle θ, dans le mouvement absolu du point, estimées parallèlement aux axes X, Y, Z.

Examinons maintenant les trois parties dans lesquelles nous avons décomposé les seconds membres. La première exprime dans les trois équations les valeurs que prennent respectivement $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$ lorsqu'on suppose x', y', z' constants; c'est-à-dire lorsqu'on suppose le point (xyz) lié invariablement au système. Ainsi, après l'introduction du facteur $\frac{\theta^2}{2}$, les premières parties en question sont les composantes de la déviation du point du système qui coïncidait avec le mobile : les secondes parties sont les composantes de la déviation dans le mouvement relatif du point, estimées de même parallèlement aux axes X, Y, Z. Il ne reste donc plus qu'à interpréter les dernières parties, et à reconnaître de quelle ligne elles sont les composantes par rapport à X, Y, Z.

Pour cela nous chercherons les composantes de cette ligne par rapport à X', Y', Z'; ce qui se fera en ajoutant les projections des premières composantes sur ces nouveaux axes; on obtient ainsi, en négligeant le facteur θ^2, les trois expressions suivantes :

$$(4) \qquad q\frac{dz'}{dt} - r\frac{dy'}{dt}, \qquad r\frac{dx'}{dt} - p\frac{dz'}{dt}, \qquad p\frac{dy'}{dt} - q\frac{dx'}{dt},$$

et il suffit de déterminer la ligne dont elles sont les projections sur X', Y', Z'.

Mais, d'après les formules (4) du n° 226, on voit que, si par le point O on mène deux droites OI, OV, dont les composantes soient, pour la première, p, q, r, et pour la se-

conde, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, les expressions (4) représentent les projections de l'aire du parallélogramme construit sur ces deux lignes, sur les plans des x', y', z' : elles sont donc proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec X', Y', Z' l'axe de cette aire, et leurs signes se rapportent à la direction de l'axe de la rotation qui amènerait OI vers OV par le plus court chemin.

L'aire de ce parallélogramme peut être remplacée par le produit de ses deux côtés adjacents et du sinus de leur angle : de sorte que la ligne dont les expressions (4) sont les projections, et qui est dirigée suivant l'axe de rotation qui vient d'être défini, est égale à $\omega v_r \sin\delta$, ω étant la vitesse angulaire, v_r la vitesse relative du mobile, et δ l'angle de la direction de cette vitesse et de l'axe instantané. En multipliant cette valeur par θ^2, on aura la troisième composante de la déviation dans le mouvement absolu du mobile. On obtient de cette manière l'expression déjà donnée

$$\theta^2 \omega . v_r \sin\delta.$$

On retombe ainsi sur la proposition démontrée n° 240, et l'on en déduirait semblablement l'expression de la déviation dans le mouvement relatif du point.

Remarque. — Lorsque le mouvement du système rigide est connu, c'est-à-dire lorsque ξ, η, ζ, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' sont des fonctions données du temps, il est facile de voir comment on peut déduire le mouvement relatif d'un point, de la connaissance de son mouvement absolu, et réciproquement. En effet, si l'on connaît x, y, z en fonction de t, les équations (1) donneront x', y', z' ; et réciproquement elles donneront x, y, z si l'on connaît x', y', z' en fonction de t.

Si l'on connaît seulement une des deux trajectoires, absolue ou relative, on en déduira facilement l'autre. Si, par exemple, l'on donne deux équations entre x, y, z seulement, qui déterminent la trajectoire absolue du mobile, il suffira d'éliminer x, y, z, t entre ces deux équations et les équations (3), et l'on aura deux équations entre x', y', z' seulement, qui seront celles de la trajectoire relative. Il en serait de même si l'on donnait d'abord deux équations entre x', y', z', et qu'on demandât celles de la trajectoire absolue.

Il est facile de généraliser ces considérations en substituant à un point un système rigide dont le mouvement pourra être déterminé par trois de ses points, ou de toute autre manière. On verra facilement que son mouvement relatif peut être déduit de son mouvement absolu, et réciproquement. Nous nous écarterions de notre objet en entraut dans plus de détails à cet égard.

Autre manière d'envisager le mouvement relatif.

246. Dans ce qui précède, nous avons considéré le mouvement relatif comme un des mouvements composants d'un corps, ou d'un point matériel. Nous avons cherché comment les données de ce mouvement pouvaient servir à déterminer, soit la vitesse, soit la déviation dans le mouvement absolu; et il a été facile de déduire de là l'expression de ces mêmes quantités dans le mouvement relatif.

Mais on peut aussi se proposer directement l'étude du mouvement relatif, et l'on peut, pour cela, procéder de plusieurs manières. La marche que nous choisirons est celle dont l'idée générale se reproduit identiquement dans les

questions les plus diverses, et qui ramène le plus naturellement à la considération du mouvement absolu.

Elle consiste à laisser s'effectuer les deux mouvements, puis à lier entre eux le point ou le corps avec le système par rapport auquel on le considère, et à donner à leur ensemble un mouvement qui ramène ce dernier à sa première position.

De cette manière, le corps aura toujours les positions relatives qu'il doit avoir dans le système en question qui se trouvera rendu immobile. Et il suffit d'ajouter un mouvement de plus à ceux auxquels le corps est assujetti; savoir, le mouvement d'ensemble qui ramène constamment le système de comparaison dans sa première position. On voit ainsi qu'en ajoutant un nouveau mouvement au corps, et cherchant le mouvement absolu résultant, ce dernier sera précisément le mouvement relatif, tel qu'il aura lieu dans le système, et que l'on se propose d'étudier. Toute la question consiste donc dans la détermination précise du mouvement à introduire, puisqu'après cela on rentre dans la considération ordinaire du mouvement absolu. Telle est la méthode depuis longtemps suivie, et que nous allons appliquer aux deux questions principales qui se rapportent au mouvement d'un seul point.

247. *Vitesse dans le mouvement relatif.* — Soient M (*fig.* 54) une position quelconque du mobile, M′ celle qu'il aura après un temps infiniment petit, M_1 celle qu'occupera après ce même temps le point du système qui coïncidait avec lui en M. Joignons ces points par des droites, et formons le parallélogramme $MM_1M'K$. Considérons maintenant le point M′ comme lié au système, et ramenons ce dernier dans sa première position. Il suffira de donner à l'ensemble un mouvement de translation qui amène M_1 en M, et M′ en K; puis un mouvement de rotation autour

de M, qui ne pourra changer la nouvelle position du point M′ que d'une quantité infiniment petite du second ordre, puisque MK est du premier. Nous pourrons donc négliger cette quantité et supposer que M′ reste en K. Or, les directions des trois droites MK, MM′, MM_1 ont pour limites celles des tangentes aux trajectoires, relative et absolue, du mobile, et à celle du point coïncident du système, et les rapports de ces trois droites ont pour limites ceux des vitesses sur ces trajectoires. D'où l'on conclut, comme précédemment, que :

La vitesse relative est la résultante de la vitesse absolue, et de la vitesse, prise en sens contraire, du point coïncident du système.

248. *Déviation dans le mouvement relatif.* — La quantité à calculer étant du second ordre infinitésimal, nous ne pourrons plus négliger, comme nous venons de le faire, le mouvement de rotation qui introduit une quantité du second ordre.

Soient M (*fig.* 57) la position du mobile à un instant quelconque, M′ celle qu'il occupe après un temps infiniment petit θ, et T′ celle qu'occuperait sur la tangente à la trajectoire un point partant de M en même temps que le mobile, et se mouvant uniformément avec la vitesse que celui-ci a en M; T′M′ sera la déviation dans le mouvement absolu. Soit de même T_1M_1 la déviation après le temps θ, dans le mouvement du point du système qui coïncidait avec le mobile en M. Les longueurs MT′, MT_1 pourront être prises pour représenter les vitesses en M sur ces deux trajectoires.

Or, pour avoir la déviation dans le mouvement relatif, il faut commencer par mener en M la tangente à la trajectoire relative, supposer un point qui s'y meuve uniformément avec la vitesse relative pendant le temps θ, tan-

dis qu'elle est entraînée par le système avec lequel elle est fixement liée, puis joindre le point où il est ainsi parvenu avec le point M'; cette droite sera, en grandeur et en direction, la déviation dans le mouvement relatif.

Cela posé, considérons le point M' comme lié au système, et ramenons celui-ci dans sa position primitive; la déviation relative se sera transportée dans une position qu'il est très-facile de déterminer.

Donnons d'abord au système les deux mouvements de translation M_1T_1 et T_1M qui ramènent le point M_1 à sa première position M. En menant $M'm'$ égal et parallèle à T_1M, $m'\mu$ égal et parallèle à M_1T_1, on aura la position de M' après les deux translations.

Lorsqu'ensuite le système tournera autour de l'axe instantané passant par M avec la vitesse angulaire ω pendant le temps θ, le point μ décrira un arc infiniment petit $\mu\mu'$, que nous déterminerons tout à l'heure; μ' sera la position du mobile lorsque le système sera revenu à sa première position.

Dans cette situation, la tangente à la trajectoire relative sera dans la direction Mt', et la longueur même Mt' sera l'espace parcouru uniformément avec la vitesse relative, pendant le temps θ, dans lequel les longueurs MT', et MT_1 égal à $T't'$, sont parcourues sur les tangentes aux deux autres trajectoires; d'où il suit que la déviation relative sera $t'\mu'$.

Mais $t'\mu'$ est la résultante des trois lignes $t'm'$ ou $T'M'$, $m'\mu$ ou M_1T_1, et enfin $\mu\mu'$. La première est la déviation dans le mouvement absolu; la seconde, la déviation, prise en sens contraire, dans le mouvement du point coïncident du système.

Quant à la troisième ligne $\mu\mu'$ décrite par le point μ tournant autour de l'axe instantané MI, nous commence-

rons par remarquer qu'elle peut être remplacée par celle que décrivait le point t', qui n'est distant de μ que d'un infiniment petit du second ordre. Sa direction est donc perpendiculaire au plan $\mathrm{IM}t'$ mené par l'axe instantané et la vitesse relative, et le sens que l'on doit prendre est celui de la rotation elle-même. Sa valeur est le produit de l'angle de rotation $\omega\theta$ par la distance de t' à MI, ou par le produit de $\mathrm{M}t'$ par $\sin \mathrm{IM}t'$; et comme $\mathrm{M}t' = \theta v_r$, v_r désignant la vitesse relative, l'arc $\mu\mu'$ a pour valeur $\theta^2 \omega v_r \sin \mathrm{IM}t'$, en négligeant les quantités infiniment petites d'ordre plus élevé. On retombe donc sur les résultats précédemment obtenus, et l'on retrouve la décomposition de la déviation relative, telle qu'elle est énoncée dans le n° 243.

LIVRE TROISIÈME.

DYNAMIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

Nous allons maintenant considérer le mouvement dans ses rapports avec les causes qui le produisent, et que nous avons désignées généralement sous le nom de *forces*.

249. *Inertie.* — Quand un corps paraît passer du repos au mouvement, c'est-à-dire lorsqu'il se déplace par rapport aux objets qui semblent immobiles à la surface de la terre, on reconnaît le plus ordinairement une cause extérieure qui a agi sur lui en ce moment; ou encore une cause qui agissait déjà sur lui pendant le repos, mais dont l'action était détruite par un obstacle qui a cessé d'exister à l'instant où l'on a vu le mouvement commencer; et il est naturel d'étendre ce fait au cas où le corps partirait du repos absolu. Cela posé, on est porté à admettre que, si un corps se met en mouvement sans qu'on en aperçoive aucune cause hors de lui, cette cause n'en existe pas moins, mais seulement que les moyens nous manquent pour reconnaître son existence.

De plus, l'expérience montre constamment qu'à mesure que les actions extérieures diminuent, le mouvement des corps tend, de plus en plus, à devenir rectiligne et uniforme; d'où l'on conclut que telle serait rigoureusement la

nature du mouvement si toutes les actions ou résistances n'existaient pas.

C'est de l'ensemble de tous ces faits que l'on a déduit le principe de *l'inertie* de la matière, qui a été confirmé sans aucune exception, par l'accord des conséquences qu'on en a tirées avec les faits résultant d'expériences directes. Il peut être énoncé de la manière suivante :

Tout point matériel en repos y reste tant qu'il ne survient aucune action extérieure ou force ; *et s'il se meut sans qu'aucune force lui soit appliquée, son mouvement sera rectiligne et uniforme.*

Mais il ne faut pas entendre par là qu'un corps n'entre pour rien dans la production des forces qui peuvent agir sur lui. L'ensemble des phénomènes naturels montre, au contraire, que ces forces naissent toujours de l'action mutuelle de ce corps et d'autres corps. L'inertie consiste donc en ce qu'un point matériel ne peut changer de lui-même son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, et qu'il faut toujours pour cela l'existence et l'action d'autres points matériels.

250. Nous allons maintenant faire connaître un principe général auquel on a été conduit par une foule d'observations et d'expériences, et qui est vérifié par l'accord constant entre les résultats auxquels conduit son admission, et l'observation directe des phénomènes. Il consiste en ce que :

Si tous les points d'un système ont des vitesses constantes et égales, et se meuvent suivant des directions parallèles, et que l'un d'eux vienne à être sollicité par une certaine force, son mouvement relativement aux autres sera le même que si le mouvement commun au système n'avait point existé, et que le point en question eût été sollicité par la même force, agissant dans la même direction.

On aperçoit facilement par quel genre d'expériences on

pourrait reconnaître la vérité de ce principe si la terre était immobile. On donnerait un mouvement uniforme commun à un système de points mobiles les uns par rapport aux autres, on appliquerait à l'un d'eux une force dont on ferait varier la direction et l'intensité, et l'on observerait le mouvement relatif de ce point. On répéterait les mêmes expériences en changeant le mouvement uniforme commun, et l'on reconnaîtrait que le mouvement relatif est tout à fait indépendant du mouvement uniforme commun, et le même que si ce dernier n'existait pas.

Ces expériences ont été faites, mais on ne saurait en conclure le principe en question, parce que la terre étant en mouvement, le système auquel on donnerait un mouvement uniforme par rapport aux objets qui restent fixes à la surface de la terre, n'aurait réellement un mouvement uniforme commun dans l'espace, que si ces objets eux-mêmes étaient animés d'un mouvement uniforme commun. Or, on sait qu'il en est autrement, et que les points qui occupent toujours une même position à la surface de la terre changent continuellement de vitesse pendant le cours de l'année. Cependant les mêmes faits se reproduisant toujours, quelle que soit cette vitesse, l'analogie conduit à admettre qu'il en serait encore ainsi si elle était nulle, et l'on obtient alors le principe général que nous avons énoncé. A la vérité, on ne peut pas dire qu'il soit rigoureusement établi par l'expérience, il résulte d'expériences et d'inductions ; mais il se présente avec assez de probabilité pour servir de base à une théorie. Si l'on trouve que les indications de cette théorie sont toujours d'accord avec l'expérience, cela lui donnera une probabilité de plus en plus grande, et qui équivaudra pour nous à la certitude. Nous en dirons autant des autres principes auxquels nous serons conduits par des expériences répétées, dont nous étendrons et généraliserons les résultats.

251. *Mouvement produit par une force constante.* — On entend par force constante celle qui exerce la même action sur le corps auquel elle est appliquée, quel que soit le mouvement de ce corps. Cela posé, considérons un point matériel ayant d'abord un mouvement rectiligne et uniforme. Si on lui applique une force constante dans le sens de son mouvement, sa vitesse augmentera de quantités égales dans des temps égaux quelconques, puisque, d'après le principe précédent, l'accroissement de vitesse est indépendant de la vitesse précédemment acquise. Ainsi, le mouvement rectiligne d'un point sollicité par une force constante, et partant avec une vitesse initiale quelconque, est tel, que la vitesse croît de quantités proportionnelles au temps. On voit de la même manière que si la force était en sens contraire du mouvement initial, la vitesse diminuerait proportionnellement au temps; et à partir de l'instant où elle serait annulée, le mouvement changerait de sens, et la variation de la vitesse serait toujours la même qu'auparavant, dans des temps égaux.

Une force constante produit donc le mouvement que nous avons nommé *uniformément varié* (n° 190). En désignant par v la vitesse, positive ou négative, du point, pour une valeur quelconque du temps t; par b la vitesse initiale, c'est-à-dire correspondante à $t = 0$; enfin par a l'*accélération* positive ou négative, produite par l'action de la force sur le point matériel, on aura, comme dans le numéro qui vient d'être cité,

$$v = at + b = \frac{dx}{dt}$$

et

$$x = \frac{at^2}{2} + bt + c;$$

c désignant la valeur initiale de x, et déterminant, par conséquent, la position initiale du mobile.

252. Si la force, au lieu d'être constante, augmentait ou diminuait d'une manière continue, on pourrait regarder comme évident que la vitesse ne croîtrait plus de quantités égales dans des temps égaux, comme dans le cas où la force était toujours la même. On conçoit au reste combien il a été facile de vérifier par l'expérience cette induction si naturelle. Et nous en déduisons cette conséquence immédiate, que :

Si un plan matériel est animé d'un mouvement uniformément varié, il est nécessairement sollicité par une force constante.

Remarques. — La considération du temps est nécessaire dans la production de tout mouvement, parce qu'il faut toujours un temps fini pour que l'action d'une force fasse acquérir à un corps une vitesse finie. Quelquefois on a distingué deux espèces de forces : les unes, que l'on nommait *instantanées,* produisaient des vitesses finies, sans que leur action s'exerçât pendant un intervalle de temps quelconque, si petit qu'on pût le supposer ; les autres, que l'on nommait *accélératrices*, avaient besoin d'agir pendant un temps fini pour produire une vitesse finie. Mais, comme toutes les actions sont continues dans la nature, et que les forces instantanées n'ont aucune existence réelle, les géomètres s'accordent généralement à ne plus les admettre dans la science. Il n'en sera jamais question dans ce cours, et nous ne considérerons que les forces continues, c'est-à-dire qui ne produisent une vitesse finie que quand leur action s'est exercée sans discontinuité pendant un temps fini.

253. Si deux points ayant des masses égales partent du repos et sont sollicités par des forces égales et parallèles, ils prendront un mouvement identique, et par conséquent, on ne changera rien à leur état, en supposant qu'ils soient liés invariablement l'un à l'autre, et que leur système soit sollicité par la force double qui est la résultante des deux

autres, et par conséquent, appliquée au centre de gravité des deux points. Il en serait de même pour un nombre quelconque de points, de sorte que si deux masses sont dans le rapport de m à n, et qu'elles soient sollicitées par des forces dans le même rapport, appliquées à leurs centres de gravité respectifs, elles prendront des mouvements identiques, et tous leurs points décriront des droites parallèles.

Si l'une des masses était sollicitée par une force moindre ou plus grande que celle qui résulte de cette proportion, elle aurait évidemment un mouvement différent de l'autre. D'où résulte cette réciproque, que si deux masses inégales ont un même mouvement, les forces qui leur sont appliquées sont proportionnelles à ces masses.

254. *Application de ce qui précède à la pesanteur.* — L'expérience a appris que tous les corps, abandonnés dans le vide à la libre action de la pesanteur, prennent des mouvements identiques, quelles que soient leur grandeur, leur espèce et par conséquent leur masse. On doit conclure de là que *les forces respectives auxquelles tous les corps sont soumis, pendant leur mouvement, par l'action de la pesanteur, ou les poids de ces corps, sont proportionnelles aux masses de ces corps.*

L'expérience a encore fait connaître les deux faits suivants, dont l'un est une conséquence de l'autre; savoir, que les espaces parcourus par un corps qui part du repos et abandonné à la libre action de la pesanteur, sont proportionnels aux carrés des temps; et que les vitesses acquises sont proportionnelles aux temps. De l'un ou de l'autre de ces faits, on conclut, d'après la discussion précédente, que la force à laquelle ce corps est soumis est constamment la même pendant tous le cours de son mouvement.

On peut reconnaître encore que son intensité est la même que lorsque le corps est en repos. En effet, au moyen

d'un appareil semblable à celui de la machine d'Atwood, on peut communiquer à un corps un mouvement vertical uniforme. Dans ce cas, la force produite par la pesanteur est détruite, et l'on peut en avoir la mesure exacte par la tension d'un ressort auquel serait suspendu le corps et qui participerait au mouvement vertical. Or, l'expérience prouve que cette tension est la même que lorsque le système est en repos; d'où il suit que *le poids d'un corps est le même dans l'état de repos et dans l'état de mouvement.*

Les *masses* des corps étant donc proportionnelles à leurs *poids dans l'état de repos*, les instruments qui servent à mesurer ces poids serviront à déterminer les rapports des masses, et l'on pourra représenter ces dernières quantités par des nombres, en prenant pour unité la masse d'un volume déterminé d'une substance choisie arbitrairement, et prise à une température déterminée. Avant les expériences de Galilée sur la chute des corps, on ne pouvait savoir que les masses étaient proportionnelles aux poids; et il en serait tout autrement si la pesanteur était, par exemple, une force du genre des attractions magnétiques qui ne s'exercent pas sur toutes les substances, et même qui s'exercent inégalement sur celles qui sont soumises à leur influence.

255. La vitesse acquise par les corps pesants tombant librement dans le vide, pendant un temps donné, dépend du lieu où se fait la chute; elle subit de petites variations suivant la latitude et l'élévation au-dessus du niveau de la mer. Nous ne nous proposons pas ici d'en faire connaître les lois, et nous nous bornerons à donner la valeur de la vitesse acquise par un corps qui tomberait pendant l'unité de temps, dans le vide, à l'Observatoire de Paris.

Pour déterminer d'abord l'unité de temps, nous supposerons le jour moyen partagé en 24 heures, l'heure en 60 minutes, la minute en 60 secondes; et nous prendrons pour unité la seconde, ou la 86400e partie du jour moyen.

Le jour sidéral, ou la durée de la rotation de la terre sur elle-même, est plus court que le jour solaire à cause du mouvement propre du soleil; il n'est que de 86164,09 secondes. Cela posé, si nous désignons par g la vitesse acquise pendant une seconde par un corps tombant dans le vide, à l'Observatoire de Paris, nous aurons, d'après des expériences précises dont nous parlerons plus tard,

$$g = 9^{m},80896,$$

le mètre étant l'unité de longueur.

256. D'après ce que nous avons vu dans le mouvement uniformément varié, nous aurons dans le cas d'un corps qui tombe verticalement dans le vide, en supposant la vitesse initiale nulle, prenant l'origine des x au point de départ, et les x positifs dans le sens de la pesanteur,

$$v = gt, \quad x = \frac{gt^2}{2},$$

et, par suite,

$$v^2 = 2gx, \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{2gx}.$$

Cette dernière expression s'appelle communément la *vitesse due à la hauteur* x, et réciproquement, x ou $\frac{v^2}{2g}$ s'appelle la *hauteur due à la vitesse* v.

Si le corps est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse a, on aura, en prenant l'origine des x au point de départ, et les x positifs en sens contraire de la pesanteur,

$$v = a - gt, \quad x = at - \frac{gt^2}{2}.$$

La vitesse deviendra nulle pour $t = \frac{a}{g}$, d'où $x = \frac{a^2}{2g}$. Le mobile monte donc pendant un temps égal à celui qu'il mettrait à acquérir la vitesse initiale a; et l'espace qu'il

parcourt en s'élevant est égal à celui qu'il parcourrait en descendant pendant le même temps sans vitesse initiale.

Le mobile après le temps $\frac{a}{g}$ redescend, puisque l'expression de la vitesse change de signe; et d'après ce qui vient d'être dit, il doit se trouver au point de départ avec une vitesse égale à $-a$, après un nouvel intervalle de temps égal à $\frac{a}{g}$. Et, en effet, les formules précédentes, pour $t = \frac{2a}{g}$, donnent

$$v = -a; \quad x = 0.$$

Proportionnalité de la vitesse à la force.

257. Ce principe fondamental de la dynamique consiste en ce que deux forces constantes quelconques qui sollicitent des masses égales pendant un même temps, leur font acquérir des vitesses qui sont entre elles dans le même rapport que les deux forces.

Beaucoup de géomètres ont admis ce principe comme une hypothèse, et ils vérifiaient son exactitude par l'accord entre les résultats des théories fondées sur elle, et des expériences ou des observations directes.

Mais, comme il est une des bases principales de la dynamique, nous croyons devoir montrer comment on peut en reconnaître l'exactitude par des expériences de différente nature, et que l'on peut faire pour autant de valeurs différentes que l'on voudra de la force accélératrice constante, ce qui n'empêchera pas d'ailleurs de faire par la suite les vérifications dont on se contentait ordinairement.

Rappelons-nous d'abord le principe admis précédemment, que le mouvement rectiligne et uniforme commun à un système de points n'influe pas sur le mouvement relatif produit par une force particulière qui agit sur l'un d'eux.

Nous pourrons, d'après cela, en regardant les points soumis aux expériences comme ayant une vitesse commune constante en grandeur et en direction, supposer la terre immobile quand il s'agira d'étudier les mouvements absolus que produiraient diverses forces sur des corps situés à sa surface; car le mouvement relatif que l'on observera ne différera pas du mouvement absolu qui serait produit par ces mêmes forces agissant seules sur les mêmes corps partant de l'état de repos.

Pour étudier la loi suivant laquelle varie le mouvement d'une même masse, sollicitée successivement par diverses forces constantes, et partant toujours de l'état de repos, on peut faire usage d'appareils analogues à la machine d'Atwood, et qui donnent le moyen de faire varier d'une infinité de manières la force appliquée à une même masse, et de mesurer avec une grande précision la vitesse acquise après l'unité de temps. Il sera facile alors de déterminer la loi suivant laquelle cette vitesse varie avec la force qui la produit.

Désignons par M la masse de l'un quelconque des poids égaux, primitivement en équilibre sur la machine, et par m la masse du poids additionnel p. Tous les points du système ayant le même mouvement, des masses égales sont sollicitées par des forces égales; ainsi une masse égale à m ne sera plus sollicitée par la force p, mais par la force $p\frac{m}{2M+m}$, ou $\frac{p}{1+2\frac{M}{m}}$: et l'on peut choisir le rapport $\frac{M}{m}$ de manière que la masse m soit sollicitée par une force ayant une valeur quelconque comprise entre o et p. Or, en déterminant les vitesses acquises dans chaque cas après une seconde, comme on peut le faire par des procédés très-précis que nous ne pouvons détailler ici, on les trouvera

dans le même rapport que les forces, avec d'autant plus d'approximation que l'on aura plus diminué les résistances étrangères.

On peut même s'assurer que la force appliquée à la masse 2 M est constante pendant le mouvement. Il suffira de suspendre le poids additionnel au moyen d'un ressort qui en fasse partie, ou qui soit compris dans l'une des masses en équilibre. On reconnaîtra qu'il est toujours également tendu pendant le mouvement, et que par conséquent la force avec laquelle la masse 2 M est tirée est constante. Sa valeur indiquée par l'allongement du ressort, étant divisée par $\frac{2\text{M}}{m}$, donnera la force appliquée à la masse m, et devra coïncider avec celle que nous avions déjà trouvée, savoir $\frac{p}{1 + 2\frac{\text{M}}{m}}$.

258. On pourrait encore diminuer la pesanteur dans un rapport connu arbitraire, en faisant descendre un corps sur un plan incliné. En effet, si l'on désigne par α l'angle de la verticale avec ce plan, le poids du corps, au lieu d'être p, sera $p \cos \alpha$, et pourra prendre toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à p. On pourra encore déterminer la vitesse acquise après une seconde, et l'on trouvera ces vitesses proportionnelles aux forces, ou du moins cette loi se rapprochera d'autant plus de l'exactitude, que l'on aura diminué davantage les frottements et résistances de toute espèce.

Nous regarderons maintenant ce principe comme démontré, ainsi que les précédents, et l'objet de la mécanique rationnelle sera de déduire de ces premières données, tirées de l'observation de la nature, toutes les lois du mouvement dans les circonstances les plus compliquées. La conformité que l'on trouvera constamment entre les résultats de l'observation directe des phénomènes et ceux que le calcul annonce

en admettant ces principes, constituera une vérification qui ne laissera aucun doute sur leur exactitude.

Comparaison des forces qui agissent sur des masses quelconques.

259. Si l'on applique une force constante p à un corps ayant une masse m, chaque unité de masse est sollicitée par la force $\frac{p}{m}$. Si l'on conçoit une seconde force constante p' appliquée à une masse m', l'unité de masse de ce nouveau corps est sollicitée par la force $\frac{p'}{m'}$.

Les mouvements de ces deux corps étant évidemment les mêmes que ceux de chacune de leurs parties, et les vitesses acquises au bout du même temps par des masses égales étant proportionnelles aux forces qui les produisent, si on désigne ces vitesses par v, v', on aura

$$v : v' :: \frac{p}{m} : \frac{p'}{m'}, \quad \text{ou} \quad p : p' :: mv : m'v'.$$

D'où il résulte que *deux forces constantes sont entre elles comme les produits des masses auxquelles elles sont appliquées, par les vitesses qu'elles leur font acquérir dans le même temps.* La proportion précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{p}{p'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{v}{v'}.$$

Si donc on prend pour unités de leurs espèces respectives les quantités désignées par p', m', v', on aura

$$p = mv.$$

Ainsi *les forces seront mesurées par le produit de la*

masse du corps auquel elles sont appliquées par la vitesse qu'elles lui font acquérir pendant l'unité de temps; en entendant que l'on a pris pour unité de force celle qui fait acquérir à l'unité de masse, dans l'unité de temps, une vitesse égale à l'unité de longueur.

260. Si l'on voulait comparer les intensités de deux forces p, p', qui dans des temps différents t, t' auraient fait acquérir des vitesses v, v' aux masses m, m', il faudrait ramener les temps à être égaux, par exemple à l'unité, avant d'y appliquer la proposition précédente. Or, la masse m aurait acquis la vitesse $\frac{v}{t}$ dans le temps t, et la masse m', la vitesse $\frac{v'}{t'}$; on aura, par conséquent,

$$p : p' :: \frac{mv}{t} : \frac{m'v'}{t'};$$

et si l'on suppose que p', m', v', t' soient tous égaux à l'unité, on aura

$$p = \frac{mv}{t},$$

l'unité de force étant la même que dans le cas précédent.

261. On est convenu d'appeler *quantité de mouvement d'un corps* le produit de sa masse par sa vitesse. On peut donc dire *qu'une force constante quelconque est mesurée par la quantité de mouvement qu'elle produit dans l'unité de temps.*

262. *Unités de force et de masse.* — Jusqu'ici nous n'avons fixé que les unités de longueur et de temps, qui sont respectivement le mètre et la seconde. Nous avons laissé indéterminées celles qui se rapportent aux forces et aux masses; seulement nous les avons liées par la condition que l'unité de force appliquée à l'unité de masse pendant l'unité de temps lui fît acquérir une vitesse égale à l'unité.

Nous conviendrons maintenant de prendre pour unité de force le kilogramme, c'est-à-dire le poids d'un décimètre cube d'eau distillée prise à la température du maximum de densité, et considéré à l'Observatoire de Paris. Voyons ce que sera, d'après cela, l'unité de masse, c'est-à-dire la masse qui, sollicitée pendant une seconde par une force constante égale au poids de 1 kilogramme, acquerrait une vitesse de 1 mètre par seconde.

Or, la masse de 1 décimètre cube d'eau sollicitée par une force égale à 1 kilogramme, c'est-à-dire par son poids à l'Observatoire, acquiert la vitesse g dans une seconde; donc la masse d'un nombre g de décimètres cubes d'eau, sollicitée par la même force de 1 kilogramme, acquerrait une vitesse égale à l'unité : elle est donc l'unité de masse.

Ainsi, en prenant la seconde pour unité de temps, le mètre pour unité de longueur, et le kilogramme pour unité de force, la masse prise pour unité doit être celle de 9,80896 décimètres cubes d'eau distillée prise à la température de 4 degrés.

Les masses pourront toujours être remplacées par des poids; ce qui est plus commode, puisque ce sont les poids qui se mesurent immédiatement avec les instruments. On observera pour cela que si P désigne le poids du corps dont la masse est m, on aura $P = mg$, puisque g unités de force expriment le poids de l'unité de masse; on en tire $m = \frac{P}{g}$; mais il ne faudra pas oublier que tout se rapporte au système d'unités que nous venons d'établir.

263. *Densité. Poids spécifique.* — On appelle *densité* d'une substance homogène la masse qu'elle renferme sous l'unité de volume; et *poids spécifique* le poids de cette masse dont le volume est l'unité. Il résulte de là, que si l'on désigne par D la densité d'une substance, son poids spécifique sera Dg; et si l'on considère une portion de cette

substance dont le volume soit désigné par V, la masse par M, et le poids par P, on aura

$$M = VD, \quad P = VDg.$$

On voit par là que si l'on formait la Table des densités et celle des poids spécifiques d'une série de substances homogènes, les nombres de la seconde ne différeraient de leurs correspondants de la première que par le facteur constant g.

Le plus ordinairement, dans ces Tables, on prend pour terme de comparaison l'eau distillée, prise à la température du maximum de densité; et l'on représente par l'unité, dans l'une la densité, dans l'autre le poids spécifique de l'eau. Dans cette supposition, les deux Tables seraient composées des mêmes nombres, et on se borne à l'une des deux dans tous les ouvrages de physique. On peut l'appeler, indifféremment, *Table des densités* ou *Table des poids spécifiques*. Mais il faut bien se souvenir que les poids spécifiques des substances, tels qu'ils doivent être substitués dans les formules de la mécanique, s'obtiennent en multipliant les nombres donnés par la Table, par le poids spécifique de l'eau qui est 1000, puisque le mètre cube est l'unité de volume, et le kilogramme l'unité de force. Et de même, pour avoir les densités de ces substances, il faudra multiplier les nombres correspondants de la Table par $\frac{1000}{g}$.

Égalité de l'action et de la réaction dans le mouvement. Force d'inertie.

264. Considérons un point matériel soumis à l'action d'une force constante, qui lui fait parcourir une ligne droite d'un mouvement uniformément accéléré. On peut remplacer cette force, quelle qu'elle soit, par un corps qui

pousserait ou tirerait le point, de manière à lui faire suivre le même mouvement; auquel cas la force produite par sa liaison au corps serait la même que la première. Or, si l'on réalise cet état de choses en poussant ou en tirant un corps quelconque au moyen d'un ressort dont on puisse négliger la masse, on reconnaîtra qu'il arrive toujours à un état permanent de tension. Il résultera de là, en ne tenant pas compte de la force nécessaire pour produire l'accélération du ressort dont la masse est considérée comme insensible, que ce ressort est sollicité à chaque instant par deux forces en équilibre, et par suite égales et contraires. Donc l'action exercée à l'une des extrémités du ressort, et qui produit l'accélération, est toujours accompagnée d'une autre action égale et contraire appliquée à l'extrémité qui est liée au corps. Cette dernière force est nommée *réaction* du corps, et les expériences que nous venons d'indiquer démontrent que *l'action est constamment égale à la réaction* dans tout mouvement où la force est constante; et par conséquent aussi dans le cas où elle est variable, puisqu'on peut toujours la considérer comme constante dans un intervalle de temps infiniment petit. C'est cette réaction qu'on appelle *force d'inertie*.

Le principe étant établi pour tous les cas où la force est produite par des liaisons matérielles, on l'étend naturellement au cas même où l'on n'aperçoit aucun intermédiaire entre les deux points qui agissent l'un sur l'autre; action qui est toujours dirigée suivant la droite qui les joint. Cette extension est confirmée par l'accord entre les phénomènes observés et les calculs fondés sur cette hypothèse; et d'ailleurs elle peut être démontrée expérimentalement toutes les fois que les corps entre lesquels a lieu l'action mutuelle peuvent être liés l'un à l'autre de manière à former un système rigide libre : on reconnaît par l'immo-

bilité de ce système que les deux forces sont contraires et égales.

Nous admettrons donc ce principe général, que toutes les fois qu'un point matériel produit une action sur un autre, ce dernier exerce toujours une action égale et contraire sur le premier; de sorte que, si ces points venaient à être liés invariablement, les deux actions se détruiraient exactement.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT RECTILIGNE D'UN POINT MATÉRIEL.

Expression de la force dans un mouvement rectiligne quelconque.

265. Nous avons vu que deux forces constantes sont entre elles comme les quantités de mouvement qu'elles ont communiquées dans le même temps. D'où il est résulté qu'une force constante peut être mesurée par la quantité de mouvement qu'elle produit dans l'unité de temps, en prenant pour unité de force celle qui, dans l'unité de temps, fait acquérir à l'unité de masse une vitesse égale à l'unité. Voyons comment on peut ramener à ce cas celui d'une force qui varie à chaque instant suivant une loi arbitraire. La question consiste à déterminer la vitesse qu'elle ferait acquérir à l'unité de masse pendant l'unité de temps, si elle conservait l'intensité qu'elle a à l'instant que l'on considère.

Supposons donc un mouvement rectiligne quelconque; soient v la vitesse du point mobile auquel nous supposerons une masse égale à l'unité, x sa distance à l'origine, t le temps, compté à partir d'une époque quelconque; désignons par φ la force variable qui sollicite le point à chaque instant, c'est-à-dire son rapport à l'unité de force, qui est mesuré par la vitesse qu'elle ferait acquérir pendant l'unité

de temps au mobile en question, dont la masse est égale à l'unité.

Si la force était constante, il suffirait de diviser la vitesse qu'elle communiquerait au point dans un temps quelconque, par ce temps, et l'on aurait la vitesse communiquée dans l'unité de temps. Mais, dans le cas actuel, si la force est φ à un certain instant, elle sera augmentée d'une certaine quantité $\Delta\varphi$ après le temps Δt, et l'accroissement Δv de la vitesse ne sera pas dû à la force φ, mais pourrait être produit par une force comprise entre φ et $\varphi + \Delta\varphi$, et qui agirait avec une intensité constante pendant le même temps Δt. Cette force intermédiaire φ' sera égale à $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, c'est-à-dire que cette expression mesure la vitesse qu'elle communiquerait au point dans l'unité de temps.

Mais l'équation rigoureusement exacte $\varphi' = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ayant lieu quel que soit l'intervalle de temps Δt, et φ' se rapprochant indéfiniment de φ à mesure que Δt tend vers zéro, puisque alors $\Delta\varphi$ tend aussi vers zéro, il en résulte, en prenant les limites des deux membres de l'équation,

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Telle est la mesure exacte de la force appliquée à l'unité de masse, dans un mouvement rectiligne quelconque. Elle est de même signe que dv, de sorte qu'en employant cette formule, on regarde la force comme positive quand elle tend à augmenter la vitesse, et comme négative quand elle tend à la diminuer; mais l'expression de celle-ci est $\frac{dx}{dt}$, et est positive quand le mouvement a lieu dans le sens des x positifs : donc la force sera positive quand elle agira dans ce même sens, puisqu'elle rendra $\frac{dx}{dt}$ ou v plus grand

en valeur algébrique; elle sera négative dans le sens contraire.

Si dans l'expression de φ on remplace v par $\frac{dx}{dt}$, on obtient

$$\varphi = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

266. Si maintenant on considère un point dont la masse soit m, la force qui le sollicite sera mesurée par $m\frac{dv}{dt}$, puisque le point qui aurait le même mouvement et une masse égale à l'unité serait sollicité par la force $\frac{dv}{dt}$, et que nous avons vu que dans des mouvements identiques les forces sont entre elles comme les masses.

On est convenu d'appeler *force motrice* celle qui est appliquée à une masse donnée quelconque; sa mesure est

$$m\frac{dv}{dt}, \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2x}{dt^2};$$

et l'on appelle *force accélératrice* celle qui, dans le mouvement que l'on considère, sollicite l'unité de masse : elle a pour mesure

$$\frac{dv}{dt}, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Cette expression, considérée dans le mouvement en lui-même, en mesure l'*accélération* positive ou négative.

Usage des formules générales du mouvement varié.

267. Ces formules sont

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

ou encore, en remettant pour dt sa valeur tirée de la première,

$$\varphi = \frac{v\,dv}{dx}.$$

Examinons les différentes questions auxquelles elles peuvent donner lieu.

1°. Supposons que l'on donne $x = \mathrm{F}(t)$, on obtiendra l'expression de la vitesse et de la force par de simples différentiations par rapport à t.

2°. Soit $v = \mathrm{F}(t)$, on aura

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d.\mathrm{F}(t)}{dt};$$

on connaîtra donc la force accélératrice.

On connaîtra la position du point à chaque instant en intégrant l'équation $\frac{dx}{dt} = \mathrm{F}(t)$, qui donne

$$x = \int \mathrm{F}(t)\,dt.$$

La constante relative à cette intégration se déterminera par la position initiale du point.

3°. Soit $\varphi = \mathrm{F}(t)$.

On connaîtra la vitesse par la formule

$$v = \int \mathrm{F}(t)\,dt,$$

et l'on déterminera la constante d'après la valeur initiale de v. Soit ainsi $v = f(t)$; on aura la valeur de x au moyen de la formule suivante :

$$x = \int f(t)\,dt,$$

et la constante introduite par cette nouvelle intégration dépendra de la position initiale du point.

4°. Soit $v = \mathrm{F}(x)$, on en conclura

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{F}(x), \quad \text{d'où} \quad t = \int \frac{dx}{\mathrm{F}(x)};$$

la constante se déterminera d'après la position initiale du point, et l'on aura ainsi une équation finie entre x et t. La force φ ou $\frac{vdv}{dx}$ sera égale à $\mathrm{F}'(x)\,\mathrm{F}(x)$.

5°. Soit $\varphi = \mathrm{F}(x)$; si l'on remplace φ par $\frac{vdv}{dx}$, on aura

$$\frac{vdv}{dx} = \mathrm{F}(x); \quad \text{d'où} \quad vdv = \mathrm{F}(x)\,dx,$$

et, en intégrant,

$$v^2 = 2\int \mathrm{F}(x)\,dx = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

On parviendrait encore à ce résultat en remplaçant φ par $\frac{d^2x}{dt^2}$; on aurait alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

Si l'on multiplie les deux membres par $2\frac{dx}{dt}$, il vient

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,\mathrm{F}(x)\frac{dx}{dt},$$

et les deux membres de cette équation sont des dérivées, par rapport à t, le premier, de $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, et le second, de $2\int \mathrm{F}(x)\,dx$; on aura donc

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int f\,\mathrm{F}(x)\,dx = v^2,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation précédemment obtenue.

La constante renfermée dans $\int$ se détermine par les valeurs initiales de x et v. On connaît ainsi la vitesse en un point quelconque du mouvement, et il reste à trouver une équation entre x et t. Désignons $2\int F(x)\,dx$ par $f(x)$; nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{f(x)}, \quad \text{d'où} \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

et la constante sera déterminée par la valeur initiale de x.

6°. Soit enfin $\varphi = F(v)$, on aura alors

$$\frac{dv}{dt} = F(v), \quad \text{d'où} \quad t = \int \frac{dv}{F(v)}:$$

la constante se déterminera par la valeur initiale de v.

Si l'on peut résoudre cette dernière équation par rapport à v, on aura

$$v = f(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \text{d'où} \quad x = \int f(t)\,dt.$$

Dans le cas contraire, on remplacera φ par $\frac{vdv}{dx}$, et l'on aura

$$\frac{vdv}{dx} = F(v), \quad \text{d'où} \quad x = \int \frac{vdv}{F(v)}.$$

Si l'on peut effectuer cette intégration, on aura une équation finie entre v et x; et comme on en a déjà une entre t et v, l'élimination de v en fera connaître une autre en x et t.

Telles sont les différentes questions auxquelles peuvent donner lieu les équations du mouvement rectiligne varié. Leur solution dépend toujours ou de différentiations, ou d'intégrations du genre des quadratures. Nous allons en faire l'application à quelques exemples.

Mouvement d'un point matériel pesant dans un milieu résistant.

268. La théorie admise sur la résistance des milieux est encore assez imparfaite; mais ici nous regarderons comme exacts les résultats approchés, auxquels des expériences multipliées ont conduit sur cette matière.

Ainsi, nous supposerons que cette résistance est une force normale aux surfaces en chacun de leurs points, proportionnelle au carré de la vitesse relative de ce point et du milieu, estimé dans le sens de la normale, ainsi qu'à la densité du fluide. Il suit de là que la résistance exercée sur une sphère en mouvement est directement opposée au mouvement de son centre, et proportionnelle au carré de son rayon. Si on la divise par la masse de la sphère, on aura la force qui en résulte pour l'unité de masse.

Soient ρ la densité du fluide, que nous supposerons en repos, D celle de la sphère, r son rayon, v sa vitesse; la résistance appliquée à l'unité de masse sera $\gamma\,\frac{\rho v^2}{r\mathrm{D}}$, γ désignant un coefficient constant. Pour plus de commodité dans nos calculs, nous rapporterons cette force à la pesanteur, et nous désignerons par K la vitesse qu'il faudrait supposer à la sphère donnée, pour que la résistance qu'elle éprouve devînt égale à son poids, c'est-à-dire pour que l'on eût $\gamma\,\frac{\rho \mathrm{K}^2}{\mathrm{D}r} = g$. Alors la résistance appliquée à l'unité de masse sera $\frac{gv^2}{\mathrm{K}^2}$; et c'est sous cette forme, où l'homogénéité est mise en évidence, que nous l'emploierons dans les calculs qui vont suivre.

269. *Mouvement descendant.* — Nous commencerons par le cas où le point matériel se meut dans le sens de la pesanteur. Soient A (*fig.* 58) le point de départ, et x la

distance du mobile à ce point après un temps quelconque t, au bout duquel il a acquis la vitesse v. En désignant par φ la force accélératrice, on aura

$$\varphi = g - g\frac{v^2}{K^2} = \frac{g}{K^2}(K^2 - v^2) = \frac{dv}{dt},$$

d'où

$$dt = \frac{K^2}{g} \cdot \frac{dv}{K^2 - v^2},$$

et, intégrant,

$$t = \frac{K}{2g} \,\mathrm{l.} \frac{K + v}{K - v}.$$

Nous n'ajouterons pas de constante, parce que nous supposons que la vitesse soit nulle au point de départ.

On tirera de là

$$\frac{K + v}{K - v} = e^{\frac{2gt}{K}},$$

d'où

$$(1) \qquad v = K \frac{e^{\frac{gt}{K}} - e^{-\frac{gt}{K}}}{e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}} = \frac{dx}{dt},$$

et, par suite,

$$x = K \int \frac{e^{\frac{gt}{K}} - e^{-\frac{gt}{K}}}{e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}} dt = \frac{K^2}{g} \,\mathrm{l.} \left(e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}\right) + C;$$

x devant être nul en même que t, on doit avoir

$$C = -\frac{K^2}{g} \,\mathrm{l.}\, 2,$$

d'où résulte

$$(2) \qquad x = \frac{K^2}{g} \,\mathrm{l.} \left(\frac{e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}}{2}\right).$$

On a donc ainsi à chaque instant la position et la vitesse du mobile; ce qui forme la solution complète de la question. On aurait pu exprimer x en fonction de v, en remplaçant φ par $\frac{vdv}{dx}$, ce qui aurait donné

$$\frac{vdv}{dx} = \frac{g}{K^2}\,\text{l}.(K^2 - v^2),$$

d'où

$$x = \frac{K^2}{g}\int\frac{vdv}{K^2 - v^2} = -\frac{K^2}{2g}\,\text{l}.(K^2 - v^2) + C,$$

et comme on a à la fois $v = 0$, $x = 0$, il en résultera

$$C = \frac{K^2}{2g}\,\text{l}.K^2,$$

et, par suite,

(3) $$x = \frac{K^2}{2g}\,\text{l}.\,\frac{K^2}{K^2 - v^2}.$$

La valeur de v en fonction de t montre qu'elle est toujours plus petite que K, mais qu'elle tend vers cette limite à mesure que t augmente, parce que l'exponentielle $e^{-\frac{gt}{K}}$ tend vers zéro. Le mouvement tend donc à devenir uniforme, et la vitesse a pour limite celle qui rend la force accélératrice égale à la force retardatrice. Cet état n'a jamais lieu rigoureusement; mais le mobile s'en approche indéfiniment, et d'autant plus rapidement, que $e^{-\frac{gt}{K}}$ décroit plus vite, ou que K est plus petit. Or, nous avons trouvé

$$K = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}\sqrt{\frac{Dr}{\rho}};$$

donc le mouvement devient sensiblement uniforme, d'autant plus promptement et avec une vitesse d'autant moindre,

que le milieu est plus dense, et que le mobile a un moindre rayon et une moindre densité; ce qui est confirmé par l'expérience.

270. Si la densité du milieu est supposée nulle, le mobile n'est plus soumis qu'à l'action de la pesanteur, la quantité K devient infinie, et l'on trouve, en supposant qu'on ait à la fois $t = 0$, $v = 0$, $x = 0$,

$$\varphi = g = \frac{dv}{dt}, \quad \text{d'où} \quad v = gt = \frac{dx}{dt},$$

et, par suite,

$$x = \frac{gt^2}{2}, \quad \text{et} \quad v^2 = 2gx.$$

Ces diverses formules, déjà obtenues précédemment, peuvent se déduire des précédentes en y faisant K infini. En effet, si on développe les exponentielles, l'équation (1) donne, en supposant $\frac{1}{K} = 0$, $v = gt$; l'équation (3), qu'on peut mettre sous la forme

$$x = -\frac{K^2}{2g}\,\text{l.}\left(1 - \frac{v^2}{K^2}\right),$$

donne, en développant le logarithme,

$$x = -\frac{K^2}{2g}\left(-\frac{v^2}{K^2} - \frac{v^4}{2K^4}\right);$$

supprimant le facteur commun K^2 et faisant ensuite K infini, on obtient

$$x = \frac{v^2}{2g}, \quad \text{ou} \quad v^2 = 2gx.$$

271. *Mouvement ascendant.* — Soit A (*fig.* 59) le point d'où part le mobile : prenons toujours la direction AX de la pesanteur pour le sens des x positifs, et soit $-a$ la vi-

tesse du mobile au moment du départ; on aura

$$\frac{dv}{dt} = g + g\frac{v^2}{K^2} = \frac{g}{K^2}(v^2 + K^2),$$

d'où

$$dt = \frac{K^2}{g}\cdot\frac{dv}{v^2 + K^2},$$

et intégrant, en observant que l'on a en même temps $t = 0$, $v = -a$,

$$\frac{gt}{K} = \text{arc tang}\frac{v}{K} + \text{arc tang}\frac{a}{K} = \text{arc tang}\frac{Kv + Ka}{K^2 - va},$$

d'où

$$\frac{Kv + Ka}{K^2 - va} = \text{tang}\frac{gt}{K},$$

et, par suite,

$$v = K\frac{K\sin\frac{gt}{K} - a\cos\frac{gt}{K}}{a\sin\frac{gt}{K} + K\cos\frac{gt}{K}} = \frac{dx}{dt};$$

d'où l'on déduit

$$x = K\int\frac{K\sin\frac{gt}{K} - a\cos\frac{gt}{K}}{a\sin\frac{gt}{K} + K\cos\frac{gt}{K}}dt$$

$$= -\frac{K^2}{g}\,\text{l.}\left(a\sin\frac{gt}{K} + K\cos\frac{gt}{K}\right) + C.$$

La constante doit être telle que l'on ait à la fois $t = 0$, $x = 0$, ce qui donne

$$x = -\frac{K^2}{g}\,\text{l.}\left(\frac{a}{K}\sin\frac{gt}{K} + \cos\frac{gt}{K}\right).$$

Le problème est donc entièrement résolu, puisque, pour toute valeur de t, on peut assigner la position et la vitesse du point, et, par suite, la force qui le sollicite.

Le mobile cessera de monter quand v sera devenu nul : la force sera g à cet instant et le fera descendre ; mais alors la résistance changera de sens et on retombe dans le premier cas. La valeur θ de t correspondante à cet instant est donnée par l'équation

$$\mathrm{K}\sin\frac{g\theta}{\mathrm{K}} - a\cos\frac{g\theta}{\mathrm{K}} = 0, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang}\frac{g\theta}{\mathrm{K}} = \frac{a}{\mathrm{K}}.$$

La valeur de x devient

$$x = -\frac{\mathrm{K}^2}{2g}\,\mathrm{l}.\,\frac{a^2+\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2}.$$

C'est la distance de l'origine A au point le plus élevé B. A partir de ce point, le mouvement peut être déterminé par les formules relatives au premier cas, si l'on prend ce point pour origine. Cherchons quelle vitesse aura le mobile quand il repassera en A, et quel temps il mettra à y revenir.

Égalons pour cela la distance AB ou $\frac{\mathrm{K}^2}{2g}\,\mathrm{l}.\,\frac{a^2+\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2}$ à la valeur de x donnée par la formule (3), il en résultera

$$\frac{a^2+\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2} = \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2-v^2}, \quad \text{d'où} \quad v^2 = a^2\,\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2+a^2}.$$

Le mobile revient donc en A avec une vitesse moindre que celle qu'il avait au moment du départ, et d'autant moindre que K est plus petit.

Pour connaître la valeur θ de t relative à cet instant, il faut dans l'équation (2) substituer à x la valeur particulière

$$\frac{\mathrm{K}^2}{2g}\,\mathrm{l}.\,\frac{a^2+\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2},$$

et l'on aura

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,\frac{a^2+\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2} = \mathrm{l}.\left(\frac{e^{\frac{g\theta'}{\mathrm{K}}} + e^{-\frac{g\theta'}{\mathrm{K}}}}{2}\right),$$

d'où

$$e^{\frac{g\theta'}{K}} + e^{-\frac{g\theta'}{K}} = 2\frac{\sqrt{a^2+K^2}}{K},$$

ou, en posant $e^{\frac{g\theta'}{K}} = z$,

$$z^2 - \frac{2\sqrt{a^2+K^2}}{K}z + 1 = 0.$$

Cette équation étant réciproque donnera à la fois $e^{\frac{g\theta'}{K}}$ et $e^{-\frac{g\theta'}{K}}$; on aura, en prenant la plus grande racine,

$$e^{\frac{g\theta'}{K}} = \frac{a+\sqrt{a^2+K^2}}{K}, \quad \text{d'où} \quad \theta' = \frac{K}{g}\,\mathrm{l}.\frac{a+\sqrt{a^2+K^2}}{K};$$

et le temps total écoulé entre le départ et le retour aura pour valeur

$$\theta + \theta' = \frac{K}{g}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{K} + \mathrm{l}.\,\frac{a+\sqrt{a^2+K^2}}{K}\right).$$

272. *Autre loi de résistance.* — Supposons maintenant la résistance proportionnelle à la vitesse, et représentée par $g\frac{K}{v}$, K étant la vitesse qui rendrait la résistance égale au poids du corps que l'on considère; si le mouvement est dans le sens de la pesanteur, on aura

$$\varphi = \frac{g}{K}(K - v) = \frac{dv}{dt},$$

d'où

$$t = \frac{K}{g}\int\frac{dv}{K-v} = -\frac{K}{g}\,\mathrm{l}.\,(K-v) + C.$$

Si la vitesse initiale est nulle, on aura

$$C = \frac{K}{g}\,\mathrm{l}.\,K,$$

et, par suite,

$$t = -\frac{K}{g}\,\mathrm{l.}\,\frac{K - v}{K},$$

d'où

$$\frac{K - v}{K} = e^{-\frac{gt}{K}}, \quad v = K\left(1 - e^{-\frac{gt}{K}}\right) = \frac{dx}{dt}.$$

On aura donc

$$x = K\int\left(1 - e^{-\frac{gt}{K}}\right)dt = Kt + \frac{K^2}{g}e^{-\frac{gt}{K}} + C,$$

et comme on a $x = 0$ pour $t = 0$, on aura

$$C = -\frac{K^2}{g},$$

et, par conséquent,

$$x = Kt + \frac{K^2}{g}\left(e^{-\frac{gt}{K}} - 1\right).$$

La valeur de v apprend que la vitesse tend indéfiniment à se réduire à K, c'est-à-dire à celle pour laquelle la résistance est égale au poids du mobile. Quant à la valeur de x, elle croît indéfiniment.

273. Dans le cas où le mobile aurait une vitesse initiale a, et ne serait pas soumis à l'action de la pesanteur, mais à la résistance seule du milieu, on aurait

$$\varphi = -g\frac{v}{K} = \frac{dv}{dt}, \quad dt = -\frac{K}{g}\frac{dv}{v}, \quad t = -\frac{K}{g}\,\mathrm{l.}\,v + C;$$

et comme on a $v = a$ pour $t = 0$, il en résulte

$$C = \frac{K}{g}\,\mathrm{l.}\,a, \quad \text{et} \quad t = -\frac{K}{g}\,\mathrm{l.}\,\frac{v}{a},$$

d'où

$$v = ae^{-\frac{gt}{K}} = \frac{dx}{dt}.$$

On tire de là

$$x = a\int e^{-\frac{gt}{K}}dt = -\frac{aK}{g}e^{-\frac{gt}{K}} + C,$$

et comme on a en même temps $t = 0$, $x = 0$, on aura

$$C = \frac{aK}{g}, \quad \text{et, par suite,} \quad x = \frac{aK}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{K}}\right).$$

On voit que la vitesse a pour limite 0, à mesure que le temps augmente indéfiniment; et x a pour limite $\frac{aK}{g}$: de sorte que le point tend indéfiniment vers une position déterminée, qu'il ne peut jamais atteindre.

274. *Mouvement vertical d'un point dans le vide.* — Supposons un point matériel placé en A (*fig.* 60) au-dessus de la surface de la terre, et attiré vers son centre O en raison inverse du carré de la distance. Prenons le point A pour origine des x que nous regarderons comme positif dans le sens de la pesanteur; et désignons par g cette force appliquée à l'unité de masse, placée à la surface de la terre, à la distance r du centre. On aura, d'après l'hypothèse, $\varphi = \frac{gr^2}{(a-x)^2}$ en posant $OA = a$. L'équation à intégrer sera donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

Elle devient, en la multipliant par $2\,dx$,

$$2\frac{d^2x}{dt^2}dx = 2gr^2\frac{dx}{(a-x)^2}.$$

Le premier membre est la différentielle de $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ correspondante à l'accroissement dt, et le second est celle de $\frac{2gr^2}{a-x}$ correspondante à l'accroissement dx relatif à dt.

Donc, les intégrales ne peuvent différer que d'une constante, et l'on aura

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2gr^2}{a-x} + C = v^2.$$

Nous supposerons la vitesse nulle au point A, d'où résultera

$$C = -\frac{2gr^2}{a},$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2gr^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2gr^2}{a}\cdot\frac{x}{a-x} = v^2.$$

Cherchons maintenant x en fonction de t. Or, on tire de cette équation, en observant que dx et dt sont de même signe,

$$dt = \frac{dx}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\sqrt{\frac{a-x}{x}} = \frac{dx}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{ax-x^2}},$$

d'où

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int\frac{(a-x)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int\frac{\left(\frac{a}{2}-x\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$
$$+ \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int\frac{\frac{a}{2}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

et, enfin,

$$(2) \qquad t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{a-2x}{a}\right).$$

Comme on doit avoir $x = 0$ pour $t = 0$, la constante sera nulle, pourvu qu'on prenne zéro pour l'arc dont le cosinus est l'unité. Le problème est donc complétement résolu, puisque, pour une valeur quelconque de x, on peut déterminer l'instant où le mobile y passera, et la vitesse qu'il aura. Réciproquement, pour une valeur donnée de t, on connaîtrait la valeur de x par la résolution approchée d'une équation numérique, ou par la construction de la courbe représentée par l'équation (2), dans laquelle t représenterait l'ordonnée.

Ces formules ne s'appliquent qu'autant que le point ne pénètre pas dans l'intérieur de la terre; elles ne s'étendront donc que jusqu'à $x = a - r$. Au delà de ce point, la force devient proportionnelle à la distance au centre, et le mouvement est représenté par des équations différentes que nous allons déterminer.

275. Nous supposerons, pour plus de simplicité, que le mobile parte du point A (*fig.* 61) de la surface de la terre avec une vitesse nulle; nous prendrons l'origine des x au centre, à cause de la symétrie par rapport à ce point, et nous regarderons les x comme positifs dans le sens OA. L'expression de la force sera

$$\varphi = -g\frac{x}{r} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Multipliant par $2dx$ et intégrant, il vient

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{gx^2}{r} + C = v^2;$$

et comme on a $v = 0$ pour $x = r$, on aura $C = gr$, d'où

$$(3) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{g}{r}(r^2 - x^2) = v^2.$$

Il reste à trouver une équation entre x et t. Or, celle-ci

donne

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

nous prenons le signe — pour la racine carrée, parce que dx et dt sont de signes contraires, tant que le mouvement a lieu en sens contraire des x positifs. On obtient, en intégrant,

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \text{arc cos} \frac{x}{r} \cdot$$

La constante est nulle, puisque l'on a en même temps $t = 0$, $x = r$. Cette équation, résolue par rapport à x, devient

(4) $$x = r \cos . t \sqrt{\frac{g}{r}} \cdot$$

La valeur de v^2 montre que la vitesse est maximum quand le point passe au centre, et qu'elle redevient nulle pour $x = -r$, c'est-à-dire à l'extrémité opposée du diamètre. Le point se trouve alors dans les mêmes circonstances; il revient donc vers sa première position par un mouvement identique au premier, et l'on aura un nombre indéfini d'oscillations semblables. La vitesse ne dépendant que de x^2, est la même pour deux positions situées à égale distance du centre.

On voit, par l'équation entre x et t, que le point arrive au centre après un temps égal à $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$; que pour des époques également distantes de cet instant, les distances au centre sont égales, et que le point arrive à l'extrémité du diamètre après un temps égal à $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, et qui exprime par conséquent la durée de l'oscillation.

Les calculs qui précèdent ne s'appliquent pas seulement

à la question particulière qui nous y a conduits, mais à toutes celles où l'on a à considérer une force proportionnelle à la distance à un point fixe; ce qui se rencontre souvent dans l'étude de la Physique.

276. Les formules précédentes se réduisent sensiblement à celles du mouvement uniformément accéléré, quand on suppose l'espace parcouru très-petit par rapport à la distance au centre; ce qui revient à supposer la force sensiblement constante.

Ainsi l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$v^2 = 2gx \cdot \frac{r^2}{a^2 - ax}.$$

Soit

$$a = r + h,$$

h étant très-petit par rapport à r et représentant l'élévation du point A au-dessus de la surface de la terre; $\frac{r^2}{a^2 - ax}$ se réduira à l'unité, en négligeant les quantités de l'ordre de $\frac{h}{r}$, et l'on aura, à ce degré d'approximation,

$$v^2 = 2gx.$$

Passons à la formule (2). On aura

$$\frac{1}{r}\sqrt{a}\sqrt{ax - x^2} = \frac{a}{r}\sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{x}}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x}{a} - \ldots\right);$$

remplaçant a par $r + h$, et négligeant les termes où entrent les rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{h}{r}$, il restera $\sqrt{x}$; et la première partie de t sera $\sqrt{\frac{x}{2g}}$.

De même, en développant arc cos $\frac{a - 2x}{a}$, ou bien

arc sin $\frac{2\sqrt{ax - x^2}}{a}$, on trouvera que la seconde partie peut être réduite à $\sqrt{\frac{x}{2g}}$, et l'on aura

$$t = 2\sqrt{\frac{x}{2g}}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{gt^2}{2}.$$

Dans la seconde question, les espaces parcourus sont $r - x$, et si on les suppose très-petits par rapport à r, la formule (3), qui peut se mettre sous la forme

$$v^2 = g(r - x)\frac{r + x}{r},$$

se réduit sensiblement à

$$v^2 = 2g(r - x);$$

la formule (4) développée devient

$$x = r\left(1 - \frac{gt^2}{2r} + \ldots\right).$$

Si l'on néglige les termes qui renferment r en dénominateur, elle se réduit à

$$r - x = \frac{gt^2}{2}.$$

277. *Remarque relative aux solutions singulières.* — L'équation différentielle du mouvement d'un point, jointe aux circonstances initiales, détermine complétement le mouvement de ce point pendant un temps indéfini. Mais quand on intègre cette équation, il faut avoir soin de n'omettre aucune de ses solutions, et tenir compte aussi bien de celles qu'on appelle *singulières*, que de celle qu'on désigne sous le nom d'*intégrale générale*. Le problème suivant donnera un exemple d'un mouvement qui est repré-

senté jusqu'à une certaine époque par l'intégrale générale, et depuis cette époque, par l'intégrale singulière.

Supposons un point en mouvement dans un fluide dont la résistance soit proportionnelle à la puissance m de la vitesse, m étant compris entre 0 et 1. Il part de l'origine des x avec une vitesse a dans le sens des x positifs, et n'est soumis à aucune autre force que la résistance du milieu. L'équation de son mouvement sera

$$(1) \qquad \frac{dv}{dt} = - kv^m,$$

k désignant une constante connue. On tire de cette équation

$$v^{-m}\, dv = - k\, dt,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad v^{1-m} = a^{1-m} - (1-m)\, kt.$$

Observons que la puissance fractionnaire v^m ne comporte dans aucun cas le double signe dans l'équation différentielle, et qu'il est entendu qu'elle sera toujours considérée comme implicitement positive; sans quoi l'équation (1) ne représenterait pas les conditions de la question mécanique. Il faut donc, dans tout le reste du calcul, considérer l'exposant m comme ne donnant qu'une valeur positive à la puissance de v où il entrera; et, lorsqu'une équation lui donnera une valeur négative, elle ne représentera pas le mouvement du point.

Nous avons dit qu'il fallait considérer toutes les solutions de l'équation (1); il faut donc tenir compte des solutions singulières, qui se réduisent à

$$(3) \qquad v = 0.$$

La solution complète du problème proposé est donc donnée par les équations (2) et (3), et il ne s'agit plus que de

reconnaître laquelle on doit considérer à un instant donné quelconque.

Or, il est évident qu'au moment du départ, la vitesse étant a, et ne pouvant être détruite que dans un temps fini, on ne devra pas faire usage de l'équation (3) dans le commencement du mouvement. On devra donc prendre l'équation (2). Mais on n'en devra faire usage que jusqu'à l'époque pour laquelle on aura

$$(1-m)kt = a^{1-m}, \quad \text{ou} \quad t = \frac{a^{1-m}}{(1-m)k},$$

parce qu'au delà on aurait une valeur négative pour v^{1-m}, ce que nous avons vu ne pouvoir convenir à la question mécanique proposée. Jusqu'à cette valeur de t, l'équation (3) ne peut convenir, mais elle est satisfaite à cette époque, et elle devra l'être indéfiniment ensuite, puisque l'équation (2) ne peut l'être, et que le problème a certainement une solution, qui ne peut être représentée que par l'une ou l'autre de ces deux équations.

Il suit de là que depuis $t=0$ jusqu'à $t = \frac{a^{1-m}}{(1-m)k}$, on aura

$$v = [a^{1-m} - (1-m)kt]^{\frac{1}{1-m}},$$

et depuis cette dernière valeur de t jusqu'à $t=\infty$, on aura $v=0$, et le point restera immobile dans la position où il sera arrivé au bout d'un temps égal à $\frac{a^{1-m}}{(1-m)k}$.

Nous pouvons maintenant intégrer l'équation (2) après avoir remplacé v par $\frac{dx}{dt}$, et nous savons jusqu'à quelle valeur de t elle donnera la valeur de x qui convient à la question : de sorte qu'il n'y aura plus aucune discussion à

faire. On aura ainsi

$$\frac{dx}{dt} = [a^{1-m} - (1-m)kt]^{\frac{1}{1-m}},$$

et par suite, en exprimant que pour $t=0$ on a $x=0$,

$$x = -\frac{[a^{1-m} - (1-m)kt]^{\frac{2-m}{1-m}}}{(2-m)k} + \frac{a^{2-m}}{(2-m)k}.$$

Le point où s'arrêtera le mobile correspondant à $a^{1-m} = (1-m)kt$ aura pour abscisse $\frac{a^{2-m}}{(2-m)k}$. Il était d'ailleurs bien facile de reconnaître à priori que si, à une certaine époque, la vitesse du point devenait nulle, il resterait constamment dans la position où il se trouverait alors. En effet, un point placé sans vitesse dans un milieu, résistant suivant une fonction quelconque de la vitesse, restera indéfiniment dans la position où on l'aura mis, puisque aucune force ne lui sera appliquée; il n'aura aucune tendance à se mouvoir d'aucun côté, et restera perpétuellement en repos.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT D'UN POINT LIBRE DANS L'ESPACE.

278. *Ce que deviendrait le mouvement si la force cessait d'agir.* — Si, à un instant quelconque du mouvement, l'action de la force cessait entièrement, le point mobile ne pourrait plus avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme, d'après la loi d'inertie que nous avons admise précédemment. Il ne reste donc à déterminer que la direction et la vitesse de ce mouvement.

Pour cela, concevons trois axes rectangulaires, de directions constantes, et dont l'origine ait précisément ce mou-

vement que nous voulons déterminer. Si la force n'agit plus, le mobile coïncidera constamment avec cette origine. Mais si elle ne cessait pas son action, c'est-à-dire si le point continuait son mouvement réel, le mouvement qu'il prendrait par rapport aux axes mobiles serait, d'après un principe général admis précédemment, celui même qui aurait lieu par rapport à des axes fixes, si on plaçait le mobile sans vitesse à leur point de rencontre, et qu'on lui appliquât la force même qui le sollicite dans son mouvement réel. Or, l'espace qu'il parcourrait ainsi dans un temps infiniment petit du premier ordre, serait un infiniment petit du second, tandis que celui que parcourrait en même temps l'origine mobile, serait du premier. Si donc, sur la direction rectiligne que suit le point après la suppression de la force, on prend une quantité infiniment petite du premier ordre, elle est à une distance infiniment petite du second ordre, du point sur sa trajectoire; d'où il suit d'abord que cette direction rectiligne ne peut être que la tangente à cette trajectoire. De plus, l'espace parcouru par le point sur sa trajectoire ne différant que d'un infiniment petit du second ordre de celui que parcourt l'origine pendant le même temps, la vitesse dans le mouvement réel, à l'instant considéré, est la même que celle de l'origine.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, à un instant quelconque la force qui produit le mouvement d'un point libre cessait d'agir, ce point se mouvrait alors uniformément suivant la tangente à la trajectoire avec la vitesse qu'il avait à ce même instant.

279. *Valeur et direction de la force d'après le mouvement produit.* — Considérons une position quelconque M (*fig.* 63) d'un point dont la masse est m, et dont les coordonnées x, y, z sont des fonctions déterminées du temps t. Si la force qui agit sur lui cessait à cet instant son action, il se mouvrait sur la tangente MT avec la vitesse v qu'il a

en M. Si donc nous supposons trois axes X′, Y′, Z′ constamment parallèles aux premiers, et dont l'origine se meuve sur MT avec la vitesse constante v, le mouvement du point m, par rapport à ces axes, sera identique à celui qui aurait lieu par rapport à des axes immobiles si le point m était placé sans vitesse à l'origine et sollicité par la même force qui agit sur lui.

Ce mouvement relatif est précisément ce que nous avons appelé le *mouvement déviatoire*, et la ligne M′m' qu'il décrit ainsi est ce que nous avons appelé la *déviation* (n° 195). Ainsi cette dernière ligne peut être considérée comme celle que décrirait le mobile placé sans vitesse au point M et sollicité par la force même qui agit sur le mobile dans son mouvement réel, en conservant à cette force une direction et une intensité constante.

On tire de là les deux conséquences suivantes :

1°. *La direction de la force qui agit à un instant quelconque sur le mobile libre, est la même que celle de la déviation en ce point.*

2°. *L'intensité de cette force, rapportée à l'unité de masse du mobile, est mesurée par l'accélération dans le mouvement déviatoire.*

De la première de ces propositions se déduit cette autre proposition importante :

La direction de la force en chaque point de la trajectoire est comprise dans le plan osculateur de cette courbe en ce point; car la déviation, joignant constamment un point de la courbe à un point de la tangente, a pour direction limite une droite située dans ce plan.

Il reste maintenant à exprimer analytiquement les propositions précédentes.

Or nous avons trouvé (nos 197 et 198) que les cosinus des angles que la direction de la déviation fait avec les axes, sont

proportionnels aux trois quantités

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

et que l'accélération dans le mouvement déviatoire était égale à

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Si donc nous désignons par φ la force accélératrice qui agit sur le mobile, nous aurons, d'après ce qui a été établi dans le numéro précédent,

$$(1) \qquad \varphi = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

et les cosinus des angles que sa direction fait avec les axes auront pour valeurs

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{1}{\varphi}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Pour avoir en grandeurs et en signes les composantes de la force accélératrice, il faudra multiplier ces cosinus par la valeur absolue φ de cette force, et l'on obtiendra ainsi

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

En multipliant ces composantes de la force qui agit sur l'unité de masse du mobile par sa masse m, on aura les composantes de la force motrice, c'est-à-dire de la force qui agit sur sa masse même. En désignant ces dernières par X, Y, Z, on aura les équations suivantes entre la force qui produit le mouvement et les coordonnées du mobile à

chaque instant :

$$(3)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

qui se réduisent aux suivantes, en supposant que le mobile ait une masse égale à l'unité :

$$(4)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Ce sont les équations différentielles du mouvement de tout point libre.

280. *Usage des équations du mouvement.* — Les équations (3) ou (4) donnent le moyen de ramener au calcul toutes les questions qui peuvent se présenter sur le mouvement d'un point. Le cas le plus simple serait celui où l'on donnerait x, y, z en fonction de t; ou, plus généralement, trois équations finies entre x, y, z, t. En les différentiant une fois par rapport à t, on connaîtrait les composantes de la vitesse du mobile. Une seconde différentiation ferait connaître les composantes de la force accélératrice, et, par conséquent, cette force elle-même en grandeur et en direction. Enfin l'élimination de t, entre les trois équations données, ferait connaître les deux équations de la trajectoire.

Mais les données de la question sont, en général, moins simples. Elles devront toujours fournir trois conditions, puisqu'il y a quatre variables x, y, z, t, dont une seule est indépendante : mais si l'on pouvait reconnaître à priori que la trajectoire est plane, on prendrait deux axes de coordonnées dans son plan, et il n'y aurait plus que trois variables, savoir : le temps t et les deux coordonnées, quelles qu'elles soient, du mobile.

Le cas le plus difficile est généralement celui où la force

est donnée. On connaît alors X, Y, Z en fonction de x, y, z, t, et les équations du mouvement sont de la forme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \mathrm{F}(x, y, z, t), \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \mathrm{F}_1(x, y, z, t), \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \mathrm{F}_2(x, y, z, t).$$

Si l'on peut intégrer le système de ces trois équations différentielles du second ordre, on parviendra à trois équations entre x, y, z, t et six constantes arbitraires. Les constantes se détermineront d'après les circonstances initiales du mouvement.

On observera, pour cela, que le mouvement du point n'est pas déterminé par la seule connaissance de la force qui agit sur lui. Il faut encore connaître la position où il se trouve à un certain instant, celui par exemple à partir duquel on commence à compter le temps, et, de plus, la grandeur et la direction de sa vitesse à cet instant. C'est en cela que consiste ce qu'on appelle l'*état initial du point*; et l'on voit qu'il renferme six données nécessaires et suffisantes, les trois coordonnées du point et les trois composantes de sa vitesse.

Or il est facile, au moyen de ces données, de déterminer les six constantes introduites par l'intégration. En effet, les équations intégrales, ainsi que toutes celles qu'on en déduirait par la différentiation, ayant lieu pour toute valeur de t, seront satisfaites si l'on y fait $t = 0$. Pour cette valeur de t on connaît, par hypothèse, les valeurs de $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. En les substituant dans les équations intégrales et leurs dérivées premières, dans lesquelles on aura fait $t = 0$, on aura six équations qui ne renfermeront d'inconnues que les six constantes, qui, par conséquent, seront déterminées.

Ayant ainsi trois équations entre x, y, z, t, on rentre dans le premier cas que nous avons examiné.

281. *Composantes, tangentielle et normale, de la force.* — Nous avons déterminé (n° 201) les composantes, tangentielle et normale, de l'accélération dans le mouvement déviatoire. La première est exprimée par $\frac{d^2 s}{dt^2}$, la seconde par $\frac{v^2}{R}$, et l'accélération elle-même par

$$\sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}.$$

Or la force a la même direction que la déviation ou l'accélération; elle aura donc avec ses composantes, suivant la tangente et la normale, les mêmes rapports que l'accélération et ses composantes suivant ces mêmes directions. Et comme nous venons de voir que la force accélératrice était mesurée par l'accélération du mouvement déviatoire, qui est

$$\sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)^2},$$

il en résulte que ses deux composantes seront aussi mesurées par celles de l'accélération.

Ainsi :

La composante tangentielle de la force accélératrice est

$$\frac{d^2 s}{dt^2},$$

et *la composante normale, dirigée vers le centre de courbure, est*

$$\frac{v^2}{R},$$

R étant le rayon de courbure de la trajectoire : on désigne aussi cette dernière sous le nom de *force centripète*. Si au lieu de l'unité de masse on suppose une masse m, ces deux

composantes se changeront en

$$m\frac{d^2s}{dt^2}, \quad m\frac{v^2}{R}.$$

282. *Composantes tangentielle et normale de la force d'inertie.* — Nous avons vu (n° 264) que toutes les fois qu'une action s'exerçait sur un corps, celui-ci exerçait toujours en sens contraire une action égale, que l'on nomme *réaction* ou *force d'inertie.* Si l'action s'exerce par la pression ou la traction d'un autre corps, ou appareil matériel quelconque, c'est sur les points matériels en contact que s'exerce la réaction. Si elle provient d'un corps à distance, c'est toujours sur ce corps que la réaction s'opère; et elle est encore égale et directement opposée à l'action qui a lieu sur le premier.

Cela posé, considérons un point libre ayant une masse m et décrivant une trajectoire quelconque sous l'action d'une certaine force, que nous nous représenterons comme produite par la traction d'un fil ou par la pression d'un autre corps; la force d'inertie sera appliquée à ce fil ou ce corps extérieur, au point même de l'espace où se trouve le mobile, et pourra être décomposée en deux autres égales et opposées à celles de la force appliquée au mobile : l'une tangentielle égale à $m\frac{d^2s}{dt^2}$, l'autre normale égale à $\frac{mv^2}{R}$.

La composante normale sera donc dans le plan osculateur de la trajectoire et dirigée du côté opposé au centre de courbure; de sorte que si l'on concevait qu'elle agît sur un point sans vitesse pendant un temps fini, ce point se mouvrait suivant la normale en s'éloignant de ce centre. C'est pour cette raison qu'on lui a donné le nom de *force centrifuge.*

On fait quelquefois de faux raisonnements relativement à la force centrifuge, parce qu'on ne se rappelle pas assez

qu'elle n'est pas appliquée au point en mouvement, mais au corps en contact avec lui, et qui, par sa pression ou sa traction, déterminerait ce mouvement. Si l'on supposait le mouvement produit autrement que par la pression d'un corps, la réaction, comme nous l'avons dit, ne serait plus appliquée à un point en contact avec celui que l'on considère, et la dénomination de force centrifuge ne semble plus assez naturelle. Par exemple, en regardant le mouvement de la terre comme produit par l'attraction du soleil, la réaction de la terre est appliquée au soleil; sa composante normale l'est donc aussi, et l'on serait obligé de dire que la force centrifuge produite par la terre est appliquée au soleil. On ferait peut-être mieux de supprimer cette dénomination qui obscurcit quelquefois les choses, et d'employer le mot *réaction*, qui rappelle toujours à quel point la force et ses composantes sont appliquées.

283. La force centripète, et, par suite, la force centrifuge, a d'abord été considérée dans le cercle, et son expression s'y détermine par des considérations très-simples. En effet, si on décompose la force accélératrice qui agit sur le point, et qui est nécessairement comprise dans le plan du cercle en deux autres forces, dont l'une soit tangente et l'autre normale au cercle, le mouvement de la projection du point sur la normale sera uniquement dû, comme nous le savons, à la composante normale. Or, en supposant cette composante constante de grandeur et de direction pendant un temps infiniment petit dt, la théorie du mouvement uniformément accéléré apprend que sa valeur sera égale au double de l'espace parcouru suivant la normale divisée par le carré du temps. Cet espace est égal au carré de la corde, ou de l'arc ds, dont il est la projection, divisé par le diamètre $2R$; donc la composante normale est égale à $\dfrac{\frac{ds^2}{dt^2}}{R}$ ou

à $\frac{v^2}{R}$. Telle est donc, dans le cercle, l'expression de la force centripète ou de la force centrifuge. Elle serait $\frac{mv^2}{R}$ pour le point dont la masse serait m.

Si l'on désigne par ω la vitesse angulaire du rayon qui contient le mobile, on aura

$$v = \omega R,$$

et l'expression de ces forces devient

$$m\omega^2 R,$$

ou encore

$$\frac{R m 4\pi^2}{T^2},$$

en désignant par T le temps que le point met à décrire le cercle.

En supposant que le mobile soit obligé de décrire le cercle au moyen d'une tige ou d'un fil, sans masse, de longueur invariable, dont une extrémité est fixée au centre, ce fil tire le point et produit sur lui la force centripète; il est tiré à son tour par la force centrifuge. Ces deux forces en équilibre sur le fil déterminent sa tension.

Si l'on supposait, au lieu de cela, un cercle matériel que le mobile ne pourrait quitter, par exemple un anneau creux infiniment étroit, dans l'intérieur duquel serait le point en mouvement, ce cercle exercerait sur lui une force dirigée vers le centre; et, réciproquement, celui-ci en exercerait une autre sur ce cercle, égale et directement opposée.

Enfin on peut concevoir un mode de liaison quelconque qui oblige le point à décrire un cercle. Nous allons en donner un exemple très-simple et très-important par les conséquences qui s'en déduisent relativement à la pesanteur.

284. *Influence du mouvement de rotation de la terre sur la pesanteur.* — Considérons un système de forme invariable et dont les points exercent les uns sur les autres des actions quelconques détruites par leur liaison mutuelle, et donnons-lui un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe. Il est facile de reconnaître qu'alors les liaisons du système détruisent, pour chaque point matériel, les actions mutuelles qu'il subissait dans l'état primitif, jointes à la force centrifuge correspondante à sa masse et à son mouvement.

En effet, on peut ajouter à toutes les actions primitives la force centripète et la force centrifuge relatives à chaque point, puisque ces deux forces se détruiront. Or la force centripète produirait le mouvement du point s'il était libre; il faut donc que toutes les autres soient détruites : donc la résultante des actions mutuelles primitives exercées sur chaque point, et de la force centrifuge considérée alors comme appliquée à ce point même, est détruite par les liaisons.

Soient r la distance d'un point quelconque du corps à l'axe, et T le temps de la révolution entière; la vitesse de ce point sera $\frac{2\pi r}{T}$, et la force centrifuge $\frac{4\pi^2 r}{T^2}$. On voit qu'elle est proportionnelle à la distance de l'axe; elle est donc nulle aux extrémités de l'axe, et la plus grande possible pour le point le plus éloigné de l'axe.

La terre est animée d'un mouvement de rotation qui, comme nous venons de l'expliquer, introduit parmi les forces détruites par la liaison des points, une force centrifuge qui n'existerait pas si elle n'avait qu'un mouvement de translation, par lequel tous ses points décriraient, dans un même temps infiniment petit, des droites égales et parallèles. Ce mouvement de rotation s'effectue dans 86164 se-

condes, et l'on a, par conséquent,

$$T = 86164.$$

A l'équateur, la rotation de la terre et la force centrifuge étant directement opposées, la pesanteur a une valeur égale à celle qu'elle aurait si la rotation n'avait pas lieu, diminuée de la force centrifuge. Si l'on fait d'abord abstraction du petit changement de la pesanteur à la surface de la terre, on pourra la regarder comme égale à g à l'équateur, et si l'on appelle G celle qui aurait lieu si la terre ne tournait pas sur elle-même, et qui est la résultante des actions mutuelles, on aura

$$g = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Mais $2\pi r = 40000000$; donc on aura à peu près

$$\frac{4\pi^2 r}{gT^2} = \frac{1}{289}, \quad \text{et} \quad g = G - \frac{g}{289},$$

ou, à très peu près,

$$g = G\left(1 - \frac{1}{289}\right).$$

La gravité est donc diminuée environ de $\frac{1}{289}$ de sa valeur par la force centrifuge à l'équateur. Et comme 289 est le carré de 17 et que la force centrifuge est proportionnelle au carré de la vitesse; si le mouvement de rotation était environ 17 fois plus rapide, la pesanteur serait nulle à l'équateur.

Sur un parallèle quelconque, la force centrifuge n'est pas directement opposée à l'attraction de la terre, mais elle change très-peu la direction de cette attraction ou de la gravité, et la diminution de son intensité est sensiblement égale à la projection de la force centrifuge sur la normale à la sphère, ou $\frac{4\pi^2 r' \cos\lambda}{T^2}$, r' étant le rayon du parallèle,

et λ sa latitude. Or, en supposant la terre sphérique, on aura

$$r' = r\cos\lambda,$$

et la diminution de la pesanteur sur ce parallèle sera

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2}\cos^2\lambda.$$

Elle varie de l'équateur au pôle proportionnellement au carré du cosinus de la latitude. Mais la terre n'étant pas tout à fait sphérique, il en résulte une autre diminution proportionnelle au carré du cosinus de la latitude, et qui s'ajoute à la première; de sorte que le poids d'un corps transporté du pôle à l'équateur diminue de $\frac{1}{200}$ au lieu de $\frac{1}{289}$.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS DES FORMULES GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN POINT LIBRE.

285. *Mouvement produit par une force dont la direction est constamment tangente à la trajectoire.* — Dans une position quelconque du mobile, les cosinus des angles que fait la force avec les axes, sont proportionnels à $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, et, par hypothèse, ils doivent être aussi proportionnels à ceux qui se rapportent à la tangente à la trajectoire en ce même point, ou à $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. On devra donc avoir les égalités suivantes :

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\frac{dz}{dt}}.$$

Intégrant ces trois membres et désignant par c, c', c'' trois constantes arbitraires, il vient

$$\mathrm{l}.\, c\frac{dx}{dt} = \mathrm{l}.\, c'\frac{dy}{dt} = \mathrm{l}.\, c''\frac{dz}{dt},$$

ou

(1) $$c\frac{dx}{dt} = c'\frac{dy}{dt} = c''\frac{dz}{dt}.$$

Intégrant de nouveau et désignant par α, α', α'' trois nouvelles constantes arbitraires, on obtient

(2) $$cx + \alpha = c'y + \alpha' = c''z + \alpha''.$$

Les coordonnées du mobile satisfaisant à deux équations du premier degré, il s'ensuit que la trajectoire est une ligne droite.

La position initiale du mobile sera un point de cette droite. Les composantes initiales de la vitesse donneront, au moyen des équations (1), les rapports des coefficients c, c', c''. La droite donnée par les équations (2) sera donc déterminée, puisqu'on connaît sa direction et un de ses points.

Ainsi, la question est ramenée au mouvement sur une droite donnée, et sera traitée comme précédemment, quand la force sera connue.

286. *Mouvement produit par une force constamment normale à la trajectoire.* — La condition connue pour que deux droites soient perpendiculaires, donne immédiatement, dans le cas actuel, l'équation

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Or le double du premier membre est la dérivée de

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

ou de v^2, v désignant toujours la vitesse; il en résulte donc que la vitesse est constante. Ainsi, en désignant par v_0 sa valeur initiale, on aura

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}=v_0^2.$$

Il suffira donc de connaître deux autres équations pour que le mouvement soit déterminé. Nous n'en offrirons ici aucun exemple; nous nous étions proposé seulement d'établir la proposition générale suivante :

Lorsque la force qui sollicite un point matériel est toujours normale à sa trajectoire, le mouvement de ce point est uniforme.

On se trouve dans les conditions de cette question quand on considère un point assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface fixe qui ne produit aucun frottement, en admettant qu'il n'y ait aucune force autre que la résistance de la courbe ou de la surface : le mobile est alors sollicité par une force constamment normale à sa trajectoire, et son mouvement sera par conséquent uniforme.

Remarque. — On aurait pu parvenir aux conséquences précédentes, relativement à ces deux dernières questions, au moyen des formules qui expriment la composante tangentielle et la composante normale de la force appliquée au mobile.

En effet, si cette force est toujours tangente à la trajectoire, la composante normale est toujours nulle; et l'on a, en chaque point,

$$\frac{v^2}{R}=0, \quad \text{ou} \quad R=\infty.$$

Donc la ligne est droite, puisque son rayon de courbure est infini en chaque point.

Et, si la résultante est toujours normale, la composante

tangentielle $\frac{d^2 s}{dt^2}$ est toujours nulle; et, par conséquent, $\frac{ds}{dt}$, ou la vitesse, a une valeur constante.

287. *Propriété du mouvement produit par une force qui passe par un point fixe.* — Lorsqu'un point matériel est sollicité par une force dont la direction passe par un point fixe que l'on prendra, pour plus de simplicité, comme origine des coordonnées, les cosinus des angles formés par la direction de cette force avec les axes doivent être proportionnels aux coordonnées x, y, z du point; et, comme ils sont proportionnels aux composantes $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$ de la force accélératrice, on aura

$$(1) \qquad \frac{\frac{d^2 x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2 z}{dt^2}}{z},$$

d'où l'on tire

$$y\frac{d^2 z}{dt^2} - z\frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad z\frac{d^2 x}{dt^2} - x\frac{d^2 z}{dt^2} = 0, \quad x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

et, en intégrant par rapport à t,

$$(2) \qquad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = C, \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C', \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C'',$$

C, C', C'' étant des constantes arbitraires.

Si l'on multiplie la première de ces équations par x, la seconde par y, la troisième par z, et qu'on les ajoute, on trouvera l'équation suivante entre les coordonnées du point à un instant quelconque :

$$Cx + C'y + C''z = 0.$$

Le point ne sort donc pas d'un plan passant par l'origine,

comme on pouvait le reconnaître à priori, en observant qu'aucune cause ne tend à faire sortir le point du plan mené par le centre d'action et la direction de la vitesse initiale.

Pour interpréter les équations (2), soient r la projection du rayon vecteur mené de l'origine au point mobile, sur le plan XY, et θ l'angle qu'elle forme avec l'axe des x. Nous supposerons que les angles croissent de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs, de sorte qu'en se plaçant dans l'axe des z positifs, on voit s'exécuter de gauche à droite le mouvement du rayon qui décrirait les angles croissants. Nous regarderons les aires décrites par un rayon vecteur comme croissant dans ce même sens ; et il en sera de même pour chacun des autres axes, relativement aux deux autres plans.

Cela posé, on aura l'équation générale

$$\tang \theta = \frac{y}{x}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\cos^2\theta} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2},$$

et, par conséquent,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt} = 2\frac{d\lambda''}{dt},$$

en désignant par λ'' l'aire décrite par la projection r du rayon vecteur du mobile.

Si l'on désigne de même par λ' et λ les aires décrites par les projections de ce rayon vecteur sur les plans ZX et ZY, les équations (2) donneront

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{C}{2}, \quad \frac{d\lambda'}{dt} = \frac{C'}{2}, \quad \frac{d\lambda''}{dt} = \frac{C''}{2};$$

d'où

$$\lambda = \tfrac{1}{2}Ct, \quad \lambda' = \tfrac{1}{2}C't, \quad \lambda'' = \tfrac{1}{2}C''t,$$

en supposant que les aires commencent avec le temps t.

Ces équations montrent que les aires décrites, à partir de cet instant, par les projections du rayon vecteur du mobile, croissent proportionnellement au temps. Et comme le mouvement du point s'effectue dans un plan, il s'ensuit que les aires décrites par le rayon vecteur du mobile dans ce plan, sont aussi proportionnelles au temps. La valeur de ces aires peut s'exprimer facilement en observant que toute aire plane est égale à la racine carrée de la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires. On aura donc, pour l'expression de ces aires,

$$\frac{1}{2} t \sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}.$$

Réciproquement, si les aires décrites par les projections du rayon vecteur sont proportionnelles au temps, la direction de la force qui sollicite le mobile, passe constamment par l'origine. Car alors les équations (3) auront lieu, et, par suite, les équations (2) qui, différentiées, donneront les équations (1); or ces équations expriment que les cosinus des angles que fait avec les axes la direction de la force, et ceux qui se rapportent à la droite menée de l'origine au point (x, y, z) sont proportionnels, et que, par conséquent, ces deux droites se confondent.

C'est dans ces deux propositions réciproques que consiste le *principe des aires* pour un point matériel.

288. Si le point était sollicité par des forces dirigées vers deux centres fixes, les équations (1) ne seraient plus satisfaites; mais la première aurait encore lieu en prenant pour axe des z la droite qui passe par les deux centres. En effet, la résultante des forces auxquelles le point est soumis, coupant constamment l'axe des z, ses composantes parallèles aux axes des x et des y sont proportionnelles à ces deux coordonnées; d'où résulte l'équation

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0;$$

et, par conséquent, le *principe des aires a lieu, dans ce cas, pour tout plan perpendiculaire à la droite qui passe par les deux centres, le centre des aires étant pris sur cette droite.*

Il est évident qu'il en serait de même si, au lieu de deux centres, on en avait un nombre quelconque situé sur une même droite.

289. *Mouvement produit par une force perpendiculaire au rayon vecteur.* — Considérons encore le cas où la force serait perpendiculaire à une ligne passant par un point fixe. C'est ce qui aura lieu par exemple pour un point assujetti à rester sur une droite qui tourne suivant une loi quelconque autour d'un de ses points et dont la pression normale est la seule force qui sollicite le point.

La condition donnée sera alors exprimée par l'équation

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=0.$$

Faisons

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

nous aurons, par la différentiation,

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=r\frac{dr}{dt}.$$

Différentiant de nouveau, il vient

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+y\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+z\frac{d^2z}{dt^2}+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$
$$=r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

équation qui, en vertu de la première, se réduit à

$$r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Nommant ω l'angle décrit dans l'espace par le rayon vecteur, on sait qu'on aura

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2.$$

Reportant cette valeur de ds^2 dans l'équation précédente, elle devient

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Cette équation a lieu quelle que soit la directrice de la surface conique décrite par le rayon vecteur.

Si l'on donnait la loi du mouvement angulaire du rayon vecteur par une équation entre ω et t, il serait possible, en combinant cette équation avec la précédente, de déterminer à chaque instant la grandeur du rayon vecteur et l'angle qu'il a décrit. Cette grandeur du rayon vecteur ne dépendant pas de la nature de la surface conique décrite, il s'ensuit que si l'on développe celle-ci sur un plan, la courbe décrite par le point mobile sera la même après le développement, quelle que soit la directrice du cône, et sera, par conséquent, la courbe même que l'on aurait obtenue en faisant mouvoir le rayon vecteur dans un plan, en observant la même loi entre ω et t.

Mouvement curviligne des projectiles pesants.

290. Nous allons appliquer, comme dernier exemple, les équations générales du mouvement d'un point libre au cas des projectiles pesants lancés dans le vide ou dans un milieu résistant.

Considérons d'abord un point matériel pesant qui parte d'un point A (*fig.* 63) avec la vitesse a dans une direction AB. Prenons pour axe des y la verticale menée par le point A et en sens contraire de la pesanteur, et pour axe

des x une perpendiculaire à cette droite dans le plan vertical qui contient la direction AB. Le mobile ne sortira pas de ce plan, et sa position sera déterminée par les deux coordonnées x, y. Les équations générales de ce mouvement sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g;$$

on en déduit

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + c_1.$$

Or, pour $t = 0$, les composantes de la vitesse sont

$$a \cos \alpha, \quad a \sin \alpha,$$

α étant l'angle BAX. Donc

$$c = a \cos \alpha, \quad c_1 = a \sin \alpha,$$

et l'on a

$$\frac{dx}{dt} = a \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + a \sin \alpha.$$

Intégrant encore, il vient

$$x = at \cos \alpha, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + at \sin \alpha.$$

Nous n'ajoutons pas de constantes parce que, pour $t = 0$, on doit avoir $x = 0$ et $y = 0$.

Or on aura l'équation de la trajectoire en éliminant t entre ces deux équations; on trouve ainsi

$$y = x \tang \alpha - \frac{g}{2a^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

équation qui représente une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des y, et, par conséquent, vertical, et dont la tangente à l'origine est la direction de la vitesse initiale.

Les coordonnées h, k de son sommet ont pour valeurs

$$h = \frac{a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad k = \frac{a^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

La directrice a pour équation

$$y = \frac{a^2}{2g};$$

elle est à une distance de A égale à la hauteur à laquelle le corps s'élèverait s'il était lancé verticalement avec la même vitesse a.

Si l'on fait $y = 0$ dans l'équation de la trajectoire, on trouve

$$x = \frac{2a^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

C'est l'expression de la distance AC, on la nomme l'*amplitude du jet;* elle est la plus grande possible quand $\alpha = 45°$.

291. Si le corps était lancé avec la même vitesse a dans des directions différentes, on aurait différentes paraboles qui auraient toutes la même directrice. Le lieu de leurs sommets s'obtiendrait en éliminant α entre les équations qui déterminent h et k; on trouve ainsi

$$4k^2 + h^2 - \frac{2a^2}{g} k = 0,$$

équation d'une ellipse dont le petit axe est égal à $\frac{a^2}{2g}$, dirigé suivant l'axe des y, et a l'une de ses extrémités à l'origine; l'autre est égal à $\frac{a^2}{g}$; il est double du premier.

292. On aura la courbe enveloppe de toutes les paraboles correspondantes aux différentes valeurs de α, en éliminant cet angle entre l'équation générale de ces lignes et

sa dérivée par rapport à α, qui donne $\tang\alpha = \frac{a^2}{gx}$. On trouvera ainsi, pour l'équation de la courbe enveloppe,

$$y = \frac{a^2}{2g} - \frac{gx^2}{2a^2},$$

ou, en désignant par h la hauteur due à la vitesse a,

$$x^2 = 4h(h-y).$$

La courbe cherchée est donc une parabole ayant pour axe l'axe des y, et son sommet du côté des y positifs à une distance h de l'origine. Elle coupe l'axe des x en deux points distants de l'origine d'une quantité égale à $2h$.

293. Si l'on veut déterminer l'inclinaison α de manière à ce que le mobile, partant avec une vitesse a, passe par un point dont les coordonnées soient x', y', il faudra résoudre, par rapport à α, l'équation

$$y' = x' \tang\alpha - \frac{gx'^2}{2a^2\cos^2 a}.$$

On en tirera

$$\tang a = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2gy' - g^2x'^2}}{gx'}.$$

Il y a donc deux inclinaisons qui satisfont à l'équation, si l'on a

$$a^4 > 2a^2gy' + g^2x'^2;$$

une seule si

$$a^4 = 2a^2gy' + g^2x'^2;$$

et aucune si

$$a^4 < 2a^2gy' + g^2x'^2.$$

Or l'équation

$$a^4 = 2a^2gy' + g^2x'^2$$

exprime que le point donné est situé sur la parabole enveloppe déterminée précédemment; et, par conséquent, le

problème est impossible si le point donné est en dehors de cette courbe, comme il était facile de le prévoir; il aura deux solutions si le point est dans l'intérieur, et une seule s'il est sur l'enveloppe. Dans ce dernier cas, il est clair que le mobile doit être lancé de manière à décrire la parabole qui touche l'enveloppe en ce point, et c'est ce que l'on reconnaît facilement d'après la valeur de tang α, qui se réduit à $\frac{a^2}{gx'}$.

294. *Mouvement dans l'air.* — La trajectoire du mobile dans un milieu résistant sera toujours comprise dans le plan vertical mené par la direction de la vitesse initiale. Les forces qui solliciteront le mobile à chaque instant seront la pesanteur, et la résistance du milieu, que nous supposerons encore représentée par $\frac{gv^2}{k^2}$, et qui sera dirigée suivant la tangente, en sens contraire du mouvement. La composante horizontale de cette force sera donc toujours dirigée dans le sens des x négatifs; sa composante verticale sera dans le sens de la pesanteur, ou des y négatifs, quand le mobile montera; et dans le sens contraire quand il descendra.

Nous avons vu que l'accélération du mouvement de la projection d'un point sur une droite quelconque était due à la force estimée parallèlement à cette droite. Ordinairement on considère les projections de ce point sur des droites rectangulaires; mais on peut les prendre obliques s'il y a quelque avantage, parce que le mouvement du point est complétement déterminé quand on connaît celui de ses projections orthogonales sur trois droites formant un angle solide quelconque, ou simplement sur deux droites si la trajectoire est plane.

Dans la question actuelle, nous supposerons, avec M. Coriolis, qu'à un instant quelconque la force soit estimée suc-

cessivement suivant une parallèle à l'axe des x et suivant la normale à la trajectoire. Ces deux forces ne seront pas les composantes de la première, et la direction de la seconde est variable; mais elles donneront l'accélération dans le sens de la normale et de l'axe des x, et il en résultera deux équations du mouvement. Elles pourront remplacer celles que l'on obtiendrait en projetant la résultante sur les deux axes, auquel cas on aurait bien les deux composantes de cette force; mais elles seront beaucoup plus simples, parce que la résistance et la pesanteur n'entreront pas à la fois dans la même équation, vu que les deux directions que nous avons choisies sont perpendiculaires respectivement aux directions de ces deux forces.

Si l'on désigne par v la vitesse, et par α l'angle que fait sa direction avec l'axe des x, et que l'on observe que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d.v\cos\alpha}{dt},$$

les forces estimées parallèlement à l'axe des x donneront l'équation

$$(1) \qquad \frac{d.v\cos\alpha}{dt} = -\frac{g}{k^2}v^2\cos\alpha.$$

Les forces projetées sur la normale, dirigée du point que l'on considère vers le centre de courbure, se réduisent à $g\cos\alpha$; et la composante, dans cette direction, a pour expression générale, $\frac{v^2}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure. D'ailleurs, $d\alpha$ étant négatif, on a

$$\rho = \frac{ds}{-d\alpha};$$

on aura donc cette seconde équation

$$(2) \qquad g\cos\alpha = -v^2\frac{d\alpha}{ds},$$

ou

$$g \cos \alpha = - v \frac{d\alpha}{dt}, \tag{3}$$

ou encore

$$g \cos \alpha = \frac{ds\, d\alpha}{dt^2}.$$

Les équations (1) et (3) sont celles dont M. Cauchy faisait usage dans son cours. Mais il obtenait la seconde par une élimination entre les équations provenant des forces estimées parallèlement aux deux axes. La manière dont nous y sommes parvenus, et qui est due à M. Coriolis, est plus directe et plus simple; elle est fondée sur cette considération, souvent utile, que l'on peut estimer les forces suivant des directions variables, et que l'on doit choisir celles qui conduisent aux calculs les plus simples.

L'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\frac{d.v \cos \alpha}{v \cos \alpha} = - \frac{g}{k^2} v dt = - \frac{g}{k^2} ds,$$

et donne, en intégrant,

$$\text{l.}\, v \cos \alpha = - \frac{gs}{k^2} + \text{C}.$$

Soient a et θ les valeurs initiales données de v et α, on aura

$$\text{l.}\, a \cos \theta = \text{C},$$

et, par suite,

$$\text{l}\, \frac{v \cos \alpha}{a \cos \theta} = - \frac{gs}{k^2},$$

ou

$$v \cos \alpha = a \cos \theta . e^{-\frac{gs}{k^2}} = \frac{dx}{dt}.$$

La valeur de v tirée de cette équation, et reportée dans l..-

quation (2), donne

$$(4)\qquad \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha} = -\frac{g}{a^2\cos^2\theta}e^{\frac{2gs}{k^2}}ds.$$

Cette équation ne renfermant que α et s, est celle de la trajectoire. Si pour l'intégrer on pose

$$\operatorname{tang}\alpha = p,$$

elle devient

$$(5)\qquad dp\sqrt{1+p^2} = -\frac{g}{a^2\cos^2\theta}e^{\frac{2gs}{k^2}}ds,$$

d'où l'on tire

$$(6)\quad p\sqrt{1+p^2} + \text{l.}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = -\frac{k^2}{a^2\cos^2\theta}e^{\frac{2gs}{k^2}} + \gamma,$$

γ étant une constante arbitraire que l'on déterminera en faisant $s = 0$, $p = \operatorname{tang}\theta$; ce qui donne

$$\gamma = \operatorname{tang}\theta\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta} + \text{l.}\left(\operatorname{tang}\theta + \sqrt{1+\operatorname{tang}^2\theta}\right) + \frac{k^2}{a^2\cos^2\theta};$$

mais, pour plus de simplicité, nous conserverons γ dans les formules.

Cette équation fait connaître s quand p est donné; mais elle est peu commode pour la construction de la courbe, et nous allons introduire x et y au lieu de s. Or on a

$$dx = \frac{ds}{\sqrt{1+p^2}},$$

et l'équation (5) donne, par suite,

$$dx = -\frac{a^2\cos^2\theta}{g}e^{-\frac{2gs}{k^2}}dp.$$

Si l'on élimine l'exponentielle au moyen de l'équation (6),

il vient

$$(7) \qquad dx = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{dp}{p\sqrt{1+p^2} + \mathrm{l}.\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) - \gamma},$$

et comme $dy = pdx$, on aura

$$(8) \qquad dy = \frac{k^2}{g} \cdot \frac{pdp}{p\sqrt{1+p^2} + \mathrm{l}.\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) - \gamma}.$$

Si l'on intègre par approximation les seconds membres de ces deux équations, on aura x et y pour chaque valeur de p; ce qui donnera autant de points que l'on voudra de la trajectoire.

Pour savoir à quel instant le mobile passera par un quelconque de ces points, il faut connaître t en fonction de p.

Or la seconde équation (3) donne

$$dt = \sqrt{-\frac{ds\,d\alpha}{g\cos\alpha}},$$

ou, en remettant la valeur de ds tirée de l'équation (4), et observant que dt et $d\alpha$ sont de signes contraires,

$$dt = -\frac{a\cos\theta}{g}\, e^{-\frac{gs}{k^2}} \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = -\frac{a\cos\theta}{g}\, e^{-\frac{gs}{k^2}}\, dp.$$

Donc enfin, en éliminant l'exponentielle au moyen de l'équation (6),

$$(9) \quad dt = -\frac{k}{g} \frac{dp}{\left[-p\sqrt{1+p^2} - \mathrm{l}.\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + \gamma\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi le problème est ramené à intégrer par approximation des fonctions données d'une seule variable.

La vitesse du mobile peut s'exprimer exactement en

fonction de p. Si l'on ajoute les valeurs de dx^2 et dy^2, puis qu'on les divise par celle de dt^2, on aura

$$(10)\qquad v^2 = \frac{k^2(1+p^2)}{\gamma - p\sqrt{1+p^2} - \text{l.}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}.$$

Le sommet de la courbe s'obtiendra en faisant $p = 0$; mais la courbe ne sera plus symétrique par rapport à la verticale menée par ce point. On aura l'amplitude du jet en faisant $y = 0$; elle sera moindre que dans le cas précédent, et son maximum, relativement à θ, correspondra à un angle plus petit que 45 degrés.

295. La branche descendante de la trajectoire est indéfinie et a une asymptote verticale, comme nous allons le démontrer.

On peut d'abord conclure de l'équation (9) que p augmente indéfiniment. Car le dénominateur du second membre est composé de termes positifs, puisque p est négatif; il ne devient donc nul pour aucune valeur de p, et l'intégrale ne pourrait croître indéfiniment si p était limité; d'où il résulterait que le temps aurait une limite, ce qui est absurde. Ainsi, la tangente à la trajectoire tend indéfiniment à devenir verticale.

Si maintenant on pose $p = -q$ pour expliciter le signe, et qu'on suppose que q soit déjà devenu très-grand, on pourra remplacer $\sqrt{1+q^2}$ par q, et négliger γ et $\text{l.}p$ par rapport à q, ce qui donnera

$$dx = \frac{k^2}{g}\cdot\frac{dq}{q^2},\quad dy = -\frac{k^2}{g}\cdot\frac{dq}{q};$$

intégrant à partir d'un point ayant pour coordonnées x_1, y_1, il vient

$$x - x_1 = \frac{k^2}{g}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q}\right),\quad y_1 - y = \frac{k^2}{g}\,\text{l.}\,\frac{q}{q_1}.$$

q_1 désignant la valeur de q au point dont les coordonnées sont x_1, y_1.

La seconde de ces équations montre que la valeur négative de y augmente sans limite, et que, par conséquent, le point descend indéfiniment. La première apprend que x a pour limite $x_1 + \frac{k^2}{gq_1}$, et que, par conséquent, la courbe a pour asymptote la verticale correspondante à cette valeur de x.

Mais comme on a négligé certains termes, cette limite n'est pas précisément l'abscisse de l'asymptote; et, pour l'avoir, il faudrait intégrer la valeur de dx jusqu'à $p = \infty$.

Quant à la valeur finale de la vitesse, l'équation (10), dans laquelle rien n'a été négligé, donne k^2 pour limite du second membre, à mesure que p augmente. La vitesse du mobile tend donc indéfiniment vers celle qui rendrait la résistance égale à son poids, et le mouvement s'approche de plus en plus de l'uniformité.

296. Examinons maintenant le cas où l'angle de projection θ est très-petit. Le point ne s'élève alors qu'à une très-petite hauteur au-dessus de l'axe des x, et la tangente étant très-peu inclinée sur cet axe, on pourra négliger p^2, et l'on aura ainsi

$$ds = dx, \quad \text{et} \quad s = x.$$

L'équation (5) se réduit à

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{a^2 \cos^2 \theta} e^{\frac{2gx}{k^2}};$$

d'où l'on tire

$$p = -\frac{k^2}{2a^2 \cos^2 \theta} e^{\frac{2gx}{k^2}} + C;$$

et comme on doit avoir en même temps $x = 0$, $p = \tang \theta$,

il en résulte

$$C = \text{tang}\,\theta + \frac{k^2}{2a^2\cos^2\theta},$$

et, par suite,

$$p = \frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\theta - \frac{k^2}{2a^2\cos^2\theta}\left(e^{\frac{2gx}{k^2}} - 1\right).$$

Intégrant et observant qu'on doit avoir à la fois $x = 0$, $y = 0$, il vient

$$y = x\left(\text{tang}\,\theta + \frac{k^2}{2a^2\cos^2\theta}\right) - \frac{k^4}{4ga^2\cos^2\theta}\left(e^{\frac{2gx}{k^2}} - 1\right).$$

L'équation

$$\frac{dx}{dt} = a\cos\theta \,.\, e^{-\frac{gs}{k^2}}$$

donne, en remplaçant s par x,

$$dt = \frac{e^{\frac{gx}{k^2}}\,dx}{a\cos\theta}, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{k^2}{ga\cos\theta}\left(e^{\frac{gx}{k^2}} - 1\right).$$

Si l'on connaît des points par lesquels passe le mobile, par exemple celui où il rencontre le sol, il en résultera, entre les constantes, des équations qui pourront servir à les déterminer.

297. *Du mouvement produit par une force dont les composantes parallèles aux axes sont les dérivées partielles d'une même fonction de* x, y, z. — Si l'on désigne par X, Y, Z les composantes de la force motrice qui sollicite un point matériel dont la masse est l'unité, les équations générales de son mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Si l'on ajoute ces équations, après avoir multiplié la première par $2\frac{dx}{dt}$, la seconde par $2\frac{dy}{dt}$, et la troisième par $2\frac{dz}{dt}$, il vient

$$\left(2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)=2\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right),$$

et, en observant que l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=v^2$$

donne

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d.v^2}{dt},$$

on aura

$$(1)\qquad \frac{d.v^2}{dt}=2\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right).$$

Et comme X, Y, Z sont les dérivées partielles d'une même fonction $F(x, y, z)$, on aura

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}=\frac{dF(x, y, z)}{dt},$$

et l'équation précédente, intégrée entre deux limites quelconques, donnera

$$(2)\qquad v^2-k^2=2F(x, y, z)-2F(a, b, c),$$

a, b, c, k désignant les coordonnées du point et sa vitesse à la première limite.

On voit donc que, dans le cas où $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ est la différentielle d'une certaine fonction de x, y, z considérées comme variables indépendantes, si un point maté-

riel est soumis à l'action de forces dont les composantes totales parallèles aux axes soient X, Y, Z, l'accroissement du carré de sa vitesse, en passant d'un point à un autre quelconque, pourra s'exprimer au moyen des coordonnées de ces deux points, quelles que soient la direction et la grandeur de sa vitesse au premier point, quelque temps qu'il mette pour parvenir au second, et quelque ligne qu'il décrive entre les deux.

On peut dire plus généralement, d'après l'équation (2), que si le mobile part d'un point quelconque de la surface dont l'équation serait $F(x, y, z) = C$ avec une vitesse connue k dans une direction arbitraire; lorsqu'il arrivera en un point de la surface ayant pour équation $F(x, y, z) = C'$, sa vitesse v peut être déterminée de grandeur d'après ces seules données, et indépendamment du temps employé, de la ligne décrite, et du nombre de fois que ce point traverse successivement la seconde surface.

L'équation générale de ces surfaces remarquables étant $F(x, y, z) = C$, C désignant une constante arbitraire, elles auront la même équation différentielle

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Cette équation exprime que les deux directions dont les angles avec les axes ont des cosinus proportionnels respectivement à X, Y, Z, et dx, dy, dz, sont perpendiculaires l'une sur l'autre. D'où l'on conclut que la force dont les composantes sont X, Y, Z est normale à celle de ces surfaces qui passe par le point que l'on considère.

Ainsi les surfaces qui jouissent de la propriété que nous avons démontrée, sont perpendiculaires à la force qui solliciterait le mobile placé en un quelconque de leurs points; de sorte que, si elles étaient résistantes, ce mobile serait en équilibre, en quelque point de ces surfaces qu'il fût posé.

On leur donne le nom de *surfaces de niveau*.

Si la fonction $F(x, y, z)$ ne peut se réduire à $\frac{0}{0}$ pour des valeurs réelles et finies de x, y, z, deux surfaces de niveau ne pourront évidemment avoir aucun point commun. Dans le cas contraire, comme on peut le voir dans un Mémoire de M. Bertrand, le point matériel n'aura pas toujours la même vitesse en revenant à une même surface de niveau : il faudra, pour cela, qu'il ait traversé un nombre pair de fois chacune des surfaces de niveau par lesquelles il passera avant de revenir sur celle d'où il était parti.

298. Si la résultante des forces qui sollicitent le point était constamment normale à la ligne qu'il décrit, on aurait

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0;$$

la fonction F se réduirait donc à une constante, et le second membre de l'équation (1) serait nul; d'où il résulte que l'on aurait

$$v^2 - k^2 = 0.$$

Ainsi, comme nous l'avions déjà vu, la vitesse d'un point est constante lorsque la force qui agit sur lui est, à chaque instant, normale à la direction de son mouvement.

D'où il résulte qu'un point qui se meut, sans frottement, sur une courbe ou une surface fixe, et qui n'est sollicité par aucune force extérieure, conserve constamment la même vitesse.

Si la résultante est normale à la trajectoire, en quelques points seulement, on a, en ces points,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0, \quad \text{ou} \quad d.v^2 = 0.$$

Donc, en général, la vitesse du mobile y sera maximum ou minimum.

299. Si, outre les forces normales à la trajectoire, il en existe d'autres dans des directions quelconques, les premières disparaîtront toujours du second membre de l'équa-

tion (1), et si les autres sont telles, que leurs composantes totales X, Y, Z soient les dérivées partielles d'une fonction des variables x, y, z, considérées comme indépendantes, on parviendra de même à l'équation (2).

Ainsi, la proposition précédente a lieu pour un point assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface fixe, et sollicité en outre par des forces telles, que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit une différentielle exacte par rapport à x, y, z, ce qui n'aurait pas lieu s'il y avait un frottement ou la résistance d'un milieu; car ces forces ne seraient même pas des fonctions données de x, y, z.

300. L'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est une différentielle exacte toutes les fois que les forces qui agissent sur le point sont dirigées vers des centres fixes, et que leurs intensités ne dépendent que de la distance du point à ces divers centres.

En effet, soient a, b, c les coordonnées constantes de l'un quelconque de ces centres; x, y, z les coordonnées variables du mobile, r leur distance, et R une fonction de r qui exprime la force qui agit sur le point donné suivant la droite qui le joint au centre que l'on considère. Les composantes de cette force seront

$$R\,\frac{a-x}{r},\quad R\,\frac{b-y}{r},\quad R\,\frac{c-z}{r},$$

si elle est attractive : il suffirait de les changer de signe si la force était répulsive; ce que l'on pourrait effectuer en changeant seulement R de signe. Les termes qui proviendront de cette force dans l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ seront donc, dans le premier cas,

$$R\left[\frac{(a-x)\,dx + (b-y)\,dy + (c-z)\,dz}{r}\right].$$

Or on a

$$(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=r^2,$$

d'où

$$(a-x)\,dx+(b-y)\,dy+(c-z)\,dz=-r\,dr,$$

ce qui réduit l'expression précédente à $-\mathrm{R}\,dr$. Elle devrait être changée en $+\mathrm{R}\,dr$ dans le cas d'une force répulsive.

Si l'on fait le même calcul pour les forces R', R'', etc., relatives aux autres centres fixes, on trouvera

$$\mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz=\mp\mathrm{R}\,dr\mp\mathrm{R}'\,dr'\mp\mathrm{R}''\,dr''+\ldots,$$

ce qui est une différentielle exacte relativement aux variables indépendantes x, y, z, puisque R est une fonction de r, R' de r', etc.

On aura donc

$$m(v^2-k^2)=\mp\int_{r_0}^{r}\mathrm{R}\,dr\mp\int_{r'_0}^{r'}\mathrm{R}'\,dr'\mp\ldots,$$

r_0, r'_0, etc., étant les valeurs de r, r', etc., correspondantes à la première position. D'où l'on voit que l'accroissement du carré de la vitesse est égal à la somme des accroissements qui auraient lieu si chacune des forces agissait seule sur le mobile, pendant qu'il passe de l'une des positions à l'autre.

301. Si le point était sollicité par une force constamment perpendiculaire à un plan fixe, et dépendant uniquement de la distance à ce plan, les mêmes conséquences auraient lieu parce que ce n'est, à proprement parler, que le cas particulier où l'un des centres se serait transporté à l'infini dans une direction déterminée. Mais il est bon de faire directement le calcul qui s'y rapporte.

L'équation d'un plan quelconque peut se mettre sous la

forme

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

α, β, γ étant les angles formés avec les axes par la direction de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan, et p la longueur de cette perpendiculaire. Soit u la perpendiculaire abaissée sur ce plan, du point dont les coordonnées sont x, y, z, on aura

$$u = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p.$$

Les composantes de la force U qui agit sur ce point seront

$$\mathrm{U}\cos\alpha,\ \mathrm{U}\cos\beta,\ \mathrm{U}\cos\gamma,\ \text{ou}\ -\mathrm{U}\cos\alpha,\ -\mathrm{U}\cos\beta,\ -\mathrm{U}\cos\gamma.$$

Les termes que cette force introduira dans l'expression $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz$ seront, dans le premier cas,

$$\mathrm{U}(dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma), \quad \text{ou} \quad \mathrm{U}\,du;$$

et, dans le second, $-\mathrm{U}\,du$: ils forment donc toujours une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, puisque U n'est fonction que de u seulement.

Si la force était toujours dirigée vers le plan, elle changerait de sens lorsque le point changerait de côté par rapport à ce plan; les cosinus de α, β, γ changeraient alors de signes, et il faudrait y avoir égard. Il faut encore observer que la valeur de u est positive quand le point n'est pas du même côté que l'origine, et négative quand il est du même côté, de sorte que les accroissements de u sont toujours positifs dans le même sens.

Quand il s'agira de la pesanteur, et que les espaces parcourus seront très-petits par rapport au rayon de la terre, la force peut être considérée comme perpendiculaire à un plan horizontal; mais elle est constante de grandeur et de direction, de quelque côté que soit situé le point par rapport à ce plan. En le prenant pour plan des x et y, et pre-

nant l'axe des z en sens contraire de la pesanteur, on a

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=-gm.$$

L'équation (1) devient

$$\frac{d.v^2}{dt}=-2g\frac{dz}{dt},$$

d'où

$$v^2-k^2=2g(h-z),$$

en désignant par h la hauteur de z correspondante à la vitesse k. Les surfaces, dont l'équation générale était $F(x,y,z)=0$, sont ici des plans horizontaux, et l'on voit qu'un point matériel libre, ou assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface fixe, et qui part d'un point quelconque d'un plan horizontal donné, avec une certaine vitesse, parviendra à un plan horizontal quelconque avec une vitesse qui ne dépendra nullement de la courbe qu'il aura suivie pour y arriver, mais seulement de la distance de son point de départ à ce plan.

CHAPITRE V.

MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE FIXE.

302. Considérons maintenant un point mobile qui ne soit pas entièrement libre, mais qui soit assujetti à rester sur une courbe fixe donnée, dont les équations soient

$$F(x,y,z)=0,\quad F_1(x,y,z)=0.$$

Supposons que le point n'éprouve aucun frottement sur cette courbe, et que, par conséquent, l'action qu'elle exerce se trouve comprise dans le plan normal. Soient N la force normale inconnue produite sur l'unité de masse par la résistance de la courbe, et λ, μ, ν les angles qu'elle fait avec

les axes; le seul effet de la courbe sur le point étant de produire cette force, on peut faire abstraction de la courbe si l'on introduit cette force; en la réunissant à celles qui sont données, le point pourra donc être considéré comme libre, et les équations générales de son mouvement seront, en désignant par X, Y, Z les composantes de la force accélératrice,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos\lambda, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos\mu, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \mathrm{Z} + \mathrm{N}\cos\nu.$$

La direction déterminée par les angles λ, μ, ν étant perpendiculaire à la tangente, on aura

$$dx\cos\lambda + dy\cos\mu + dz\cos\nu = 0,$$

et, de plus,

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

On a donc sept équations entre les huit quantités x, y, z, λ, μ, ν, N, t; et il sera toujours possible d'exprimer les sept premières en fonction de t. Quand on y sera parvenu, tout ce qui se rapporte au mouvement du point sera déterminé.

Lorsque l'on a

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = d.\varphi(x, y, z),$$

les équations précédentes donnent

$$\frac{dx\,d^2 x + dy\,d^2 y + dz\,d^2 z}{dt^2} = d.\varphi(x, y, z),$$

et, en intégrant,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2\varphi(x, y, z) + \mathrm{C} = v^2.$$

La constante C se déterminera par la valeur de la vitesse v

au point de départ. D'ailleurs, les équations de la courbe, résolues par rapport à x et y, donneront

$$x = f(z), \quad y = f_1(z).$$

L'équation précédente deviendra donc

$$\frac{dz^2}{dt^2}\left\{1 + [f'(z)]^2 + [f_1'(z)]^2\right\} = 2\varphi[f(z), f_1(z), z] + C;$$

d'où

$$dt = dz\,\psi(z),$$

$\psi(z)$ désignant une fonction connue de z; on tirera de là

$$t = \int dz\,\psi(z) + C',$$

C′ étant déterminé par la valeur initiale de z. On connaîtra donc ainsi z en fonction de t, et, par suite, x et y le seront d'après les équations de la courbe.

Ainsi, dans le cas où $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est une différentielle exacte, le problème est ramené aux quadratures.

303. *Pression exercée sur la courbe.* — Désignons par T la composante tangentielle de la force appliquée à l'unité de masse du mobile; par Q sa composante normale. Le point pouvant être considéré comme libre, après l'introduction de la force N produite par la courbe, $\frac{dv}{dt}$ ou $\frac{d^2 s}{dt^2}$ sera égal à T; et une force égale à $\frac{v^2}{R}$, dirigée vers le centre de courbure, ou la force centripète, sera la résultante des deux forces normales Q et N. Donc N, ou la force produite par la courbe, sera la résultante de la force centripète et d'une force égale et contraire à Q. Et, par conséquent, la force égale et contraire, ou *la pression exercée sur la courbe,* et détruite par elle, est la résultante de la force Q et de la force centrifuge. Elle se réduirait à la force centrifuge si la force Q était nulle.

Toutes ces forces, que nous avons supposées rapportées à l'unité de masse, se rapporteraient à la masse m, en les multipliant par m.

La direction de la pression exercée sur la courbe se déterminera facilement, connaissant sa valeur et celle de ses composantes.

Application au cas d'un point matériel pesant.

304. Soient

$$x = F(z), \quad y = f(z),$$

les équations de la courbe fixe sur laquelle doit se mouvoir un point matériel soumis à l'action seule de la pesanteur. Désignons par N la force normale que produit à chaque instant la résistance de la courbe rapportée à l'unité de masse; par λ, μ, ν les angles que fait sa direction avec les axes, et supposons l'axe des z vertical et en sens contraire de la pesanteur. Les équations du mouvement du point seront

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = N \cos \lambda, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = N \cos \mu, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + N \cos \nu.$$

Si l'on multiplie la première par $2dx$, la seconde par $2dy$, la troisième par $2dz$, et qu'on les ajoute, il vient

$$d.v^2 = -2g dz; \quad \text{d'où} \quad v^2 = 2gz + C.$$

La constante C se déterminera d'après la valeur k de la vitesse, pour $z = h$, et l'on aura

$$v^2 - k^2 = 2g(h - z).$$

Si l'on remplace v^2 par sa valeur

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

ou

$$\frac{dz^2}{dt^2}\left\{1+[F'(z)]^2+[f'(z)]^2\right\},$$

il vient, en résolvant par rapport à t, et supposant que le point descende, et que, par conséquent, $\frac{dz}{dt}$ soit négatif,

$$dt = -\frac{dz\sqrt{1+[F'(z)]^2+[f'(z)]^2}}{\sqrt{k^2+2gh-2gz}}.$$

De cette équation on tirera t en fonction de z; si l'on peut la résoudre par rapport à z, on aura, pour chaque valeur de t, la valeur de z, et, par suite, de x et y : le problème sera donc complétement résolu. Mais lors même que l'on ne pourrait intégrer l'expression précédente, on connaîtrait la vitesse en chaque point, par suite la force centrifuge, et enfin la pression exercée sur la courbe, qui est la résultante de la force centrifuge et de la composante normale de la pesanteur.

On remarquera que si s reste la même fonction de z, quoique la courbe change, ds^2, et, par suite v^2, est exprimé par la même fonction de z, et le mouvement sur la courbe est le même. Ainsi, en enveloppant sur un cylindre vertical quelconque, le cylindre projetant d'une courbe, le point pesant passera, aux mêmes époques, par les points correspondants.

305. Effectuons ces calculs dans le cas où la courbe donnée est un cercle vertical. Prenons l'axe des x dans ce plan et tangent au point le plus bas du cercle, il en résultera, pour les équations de cette courbe,

$$y=0,\quad x^2+z^2-2az=0,$$

a étant son rayon. On en tirera

$$\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{dx^2+dz^2}{dt^2}=\frac{a^2}{2az-z^2}\cdot\frac{dz^2}{dt^2},$$

et l'équation

$$v^2 - k^2 = 2g(h - z)$$

devient

$$\frac{a^2}{2az - z^2} \cdot \frac{dz^2}{dt^2} = k^2 + 2gh - 2gz,$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{\pm\, adz}{\sqrt{2az - z^2}\,\sqrt{k^2 + 2gh - 2gz}};$$

on prendra le signe — quand le point descendra, et le signe + quand il montera.

Le carré de la vitesse ayant pour expression

$$k^2 + 2gh - 2gz$$

sera maximum pour $z = 0$, c'est-à-dire au point le plus bas, et cette valeur sera

$$k^2 + 2gh.$$

La vitesse deviendra nulle quand on aura

$$k^2 + 2gh - 2gz = 0, \quad \text{ou} \quad z = h + \frac{k^2}{2g},$$

pourvu que l'on ait

$$h + \frac{k^2}{2g} < 2a;$$

car z ne peut surpasser le diamètre du cercle. Dans cette hypothèse, le point parvenu à cette hauteur redescendra, sa vitesse deviendra nulle de l'autre côté pour la même valeur de z, et ce mouvement d'oscillation se continuera indéfiniment. Si, au contraire, on a

$$h + \frac{k^2}{2g} > 2a,$$

la vitesse sera minimum au point le plus élevé du cercle,

mais elle n'y sera pas nulle, et le mouvement aura lieu constamment dans le même sens.

Enfin, si l'on a

$$h + \frac{k^2}{2g} = 2a,$$

la vitesse serait nulle au point le plus élevé, et le mobile y resterait en équilibre, s'il pouvait y parvenir; mais nous allons voir que cette position est une limite vers laquelle il tend sans pouvoir l'atteindre jamais. Ce cas est le seul où l'intégration puisse s'effectuer sous forme finie; on a alors

$$dt = \pm \frac{a}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{(2a - z)\sqrt{z}}.$$

On pourrait intégrer cette expression en la rendant rationnelle par les méthodes ordinaires; mais on peut y parvenir plus simplement en observant que $\frac{dz}{2\sqrt{z}}$ est la différentielle de $\sqrt{z}$, et que la fraction $\frac{1}{2a - z}$ peut être décomposée de la manière suivante :

$$\frac{1}{2a - z} = \frac{1}{2\sqrt{2a}}\left(\frac{1}{\sqrt{2a} + \sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{2a} - \sqrt{z}}\right).$$

On aura ainsi, pour le mouvement descendant,

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}}}{\sqrt{2a} + \sqrt{z}} + \frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}}}{\sqrt{2a} - \sqrt{z}}\right),$$

d'où l'on tire

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{l.}\,\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{z}}{\sqrt{2a} - \sqrt{z}} + C.$$

La constante se déterminera par la condition que l'on ait

en même temps $t=0$, $z=h$, et il en résultera

$$t=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{l}.\,\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{l}.\,\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a}-\sqrt{h}}.$$

Lorsque le mobile arrive au point le plus bas, on a

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{l}.\,\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a}-\sqrt{h}}.$$

A partir de cet instant, $\frac{dz}{dt}$ étant positif, on doit changer de signe la première partie de la valeur de t, ce qui donne

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{l}.\,\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{l}.\,\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a}-\sqrt{h}}.$$

A mesure que t augmente, z augmente nécessairement, mais il est toujours plus petit que $2a$; et l'on trouverait $t=\infty$ si l'on faisait $z=2a$. Le mobile n'arrive donc jamais au point le plus élevé du cercle, mais il s'en approche indéfiniment.

306. Considérons maintenant le cas où le mobile oscille de part et d'autre du point le plus bas du cercle. Nous pouvons supposer nulle la vitesse initiale; car cela revient à prendre pour point de départ un point plus élevé du cercle. On aura alors, pendant que le mobile descend,

$$dt=-\frac{a}{\sqrt{2g}}\frac{dz}{\sqrt{2az-z^2}\sqrt{h-z}}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{dz}{\sqrt{hz-z^2}}\left(1-\frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

et comme $\frac{z}{2a}$ est plus petit que l'unité, on peut développer

le dernier facteur de la manière suivante :

$$\left(1 - \frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2a}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{z}{2a}\right)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{z}{2a}\right)^n + \ldots.$$

Or on a, d'après une formule donnée dans le calcul intégral,

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{hz - z^2}} = -\frac{z^{n-1}\sqrt{hz - z^2}}{n} + \frac{(2n-1)h}{2n}\int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{hz - z^2}},$$

et, par conséquent, on pourra intégrer, entre des limites quelconques, autant de termes que l'on voudra de la série qui exprime la valeur de dt.

Bornons-nous à calculer le temps que met le mobile à arriver au point le plus bas, et qui est le même que celui qu'il mettrait à remonter à la hauteur h où se termine l'oscillation, puisque ces intervalles sont exprimés par la même intégrale prise entre les mêmes limites o et h.

La formule de réduction que nous venons de rappeler, devient

$$\int_0^h \frac{z^n\,dz}{\sqrt{hz - z^2}} = \frac{(2n-1)h}{2n}\int_0^h \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{hz - z^2}},$$

ou, si l'on désigne généralement $\int_0^h \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{hz - z^2}}$ par A_n,

$$A_n = \frac{(2n-1)h}{2n} A_{n-1}.$$

Cette formule conduit à la suivante, en observant que $A_0 = \pi$,

$$A_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} h^n \pi.$$

Cela posé, pour la demi-oscillation descendante, les limites des intégrales sont dans l'ordre inverse de celui que nous venons de prendre; il faudra donc changer le signe du second membre, si l'on veut faire usage de la formule que nous venons de trouver pour les intégrales qui composent la valeur de t. Si donc on désigne par T la durée de l'oscillation entière, on aura d'abord

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ \begin{array}{l} A_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a}\right) A_1 + \ldots \\ \quad + \frac{1.3..(2n-1)}{2.4...2n} \left(\frac{1}{2a}\right)^n A_n + \ldots \end{array} \right\},$$

ou

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^2 + \ldots \\ \quad + \left[\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}\right]^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^n + \ldots \end{array} \right\}.$$

Cette série sera très-convergente si $\frac{h}{2a}$ est très-petit, et l'on calculera facilement l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque. Si l'angle au centre 2α, qui mesure l'amplitude des oscillations, ne se compose que d'un petit nombre de degrés, on peut le plus ordinairement se borner au premier terme; et l'on a

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}};$$

cette durée est indépendante de la hauteur h. Si l'on prend les deux premiers, la durée dépendra de h, et l'on aura

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left(1 + \frac{h}{8a}\right).$$

Le rapport $\frac{h}{a}$ étant le sinus-verse de l'angle α, on a

$$\frac{h}{a} = 1 - \cos\alpha = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Ainsi, cette dernière valeur de T n'est en erreur que d'une quantité du quatrième ordre par rapport à l'angle α; la précédente était en erreur d'une quantité du second ordre.

307. Le moyen que l'on emploie pour réaliser ce mouvement consiste à suspendre un poids à un fil très-délié et d'une longueur invariable, dont une extrémité est fixe. Si ce fil inextensible était dépourvu de toute masse et que le mobile fût réduit à un seul point, on aurait ce que l'on appelle un *pendule simple*. Mais il est beaucoup plus avantageux d'employer un appareil solide au lieu d'un fil, et le mouvement de ce *pendule composé* ne peut plus être calculé par la théorie précédente. Dans ce dernier cas, on appelle *longueur du pendule*, celle du pendule simple qui aurait ses oscillations de même durée.

Au moyen d'une formule que nous démontrerons plus tard, on peut déterminer cette longueur d'après la forme du corps oscillant, et la durée de l'oscillation sera donnée par la formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

dans laquelle a représente la longueur connue de ce pendule. Si l'on désigne par n le nombre des oscillations qui auront lieu dans un temps θ, on aura

$$\theta = nT, \quad \text{d'où} \quad \theta = n\pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \quad \text{et} \quad g = \frac{\pi^2 n^2 a}{\theta^2},$$

équation qui fera connaître la valeur de la pesanteur. C'est ainsi que, d'après les expériences faites à l'Observatoire de Paris, on a trouvé

$$g = 9,80896.$$

En faisant des expériences semblables en différents lieux

de la terre, on déterminera la loi suivant laquelle varie la pesanteur.

308. On peut encore déterminer le mouvement du pendule au moyen de la formule qui donne l'expression de la force tangentielle. Soient OB (*fig.* 64) le rayon vertical du cercle sur lequel se meut le point pesant, A la position d'où il part avec la vitesse k, et M sa position après le temps t. Faisons

$$OB = l, \quad BOA = \alpha, \quad BOM = \theta, \quad AM = s.$$

La composante tangentielle de la force accélératrice est exprimée généralement par $\frac{d^2 s}{dt^2}$ en grandeur et en signe, le signe + se rapportant au cas où elle est dirigée du côté où s croît, et le signe — au sens contraire. Si l'on considère θ comme négatif quand le rayon OM passe de l'autre côté de la verticale, on aura généralement

$$s = l(\alpha - \theta), \quad \frac{ds}{dt} = -l\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

La composante tangentielle de la pesanteur étant d'ailleurs $g \sin\theta$, on trouvera, en l'égalant à l'expression précédente,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta,$$

d'où, en multipliant par $2\,d\theta$ et intégrant,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\cos\theta + C.$$

La constante C se déterminera par la condition que l'on ait en même temps $\theta = \alpha$, $-l\frac{d\theta}{dt} = k$, ce qui donne

$$\frac{k^2}{l^2} = \frac{g}{l}\cos\alpha + C,$$

et, par suite,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{l^2} + \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

On tirera de là, en observant que $d\theta$ est de signe contraire à dt tant que le mouvement reste dans le même sens,

$$dt = \frac{-l\,d\theta}{\sqrt{k^2 + 2gl(\cos\theta - \cos\alpha)}}.$$

On rentrerait dans le calcul précédent en exprimant θ au moyen de l'ordonnée du cercle comptée à partir du point B.

Si l'on suppose que les angles α et θ soient assez petits pour qu'on puisse négliger leurs quatrièmes puissances, et que, de plus, la vitesse initiale soit nulle, la formule précédente se simplifie beaucoup, et devient

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}},$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}.\text{arc}\cos\frac{\theta}{\alpha}.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, parce que l'on doit avoir à la fois $t = 0$, $\theta = \alpha$.

La vitesse devient nulle lorsque $\theta = -\alpha$. Il en résulte

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Telle est la durée de l'oscillation. Le mouvement recommence ensuite en sens contraire d'une manière identique; le point revient en A avec une vitesse nulle, après le même intervalle de temps $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$: il se trouve alors dans les mêmes

circonstances qu'au commencement, et cette double oscillation se reproduit indéfiniment, si l'on fait abstraction de toutes les résistances extérieures.

309. Dans tout ce qui précède, nous avons pu faire abstraction de la résistance de l'air. Cette action modifie très-peu les résultats et n'exige que de très-petites corrections dans les formules. Nous n'entrerons ici dans aucun détail sur ce sujet, et nous nous contenterons de montrer comment une résistance quelconque modifierait les équations générales du mouvement d'un point sur une courbe.

Soit F (v) une fonction donnée quelconque de la vitesse du mobile, qui exprime la résistance produite par un milieu ou un frottement. Les équations du mouvement du point matériel pesant seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{N}\cos\lambda - \mathrm{F}(v)\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{N}\cos\mu - \mathrm{F}(v)\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{N}\cos\nu - \mathrm{F}(v)\frac{dz}{ds} - g;$$

d'où l'on tire

$$d.v^2 = -2gdz - 2\mathrm{F}(v)\,ds.$$

Or, au moyen des équations de la courbe on peut exprimer ds au moyen de z et dz; v s'exprimera de même en fonction de z, dz et dt : de sorte que l'on aura une équation différentielle entre z et t seulement. Si on peut l'intégrer, on connaîtra z, x, y en fonction de t, et le mouvement sera complétement déterminé.

L'équation précédente donne, en l'intégrant,

$$v^2 - k^2 = 2g(h - z)\int_h^z \mathrm{F}(v)\,ds;$$

d'où l'on voit que l'intégrale $2\int_h^z F(v)\,ds$ exprime la perte éprouvée dans le carré de la vitesse par la résistance représentée par $F(v)$.

310. *Mouvement sur la cycloïde.* — Si l'on prend pour axe des x la tangente au sommet, et pour axe des z la perpendiculaire à la base, l'équation différentielle de la cycloïde est

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{z}{2a - z}},$$

a étant le rayon du cercle générateur. Supposons que le plan de cette courbe soit vertical et que l'axe des z soit dans la direction contraire à celle de la pesanteur. On aura l'équation trouvée précédemment dans le cas d'une courbe quelconque

$$v^2 - k^2 = 2g(h - z)$$

ou

$$\frac{ds^2}{dt^2} = k^2 + 2gh - 2gz.$$

On peut supposer k nul en élevant convenablement le point de départ sur la cycloïde, pourvu que l'on n'ait pas $k^2 + 2gh > 4ga$; c'est le cas que nous supposerons. On a donc l'équation aussi générale

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(h - z).$$

Or, d'après l'équation de la cycloïde, on a

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2a}{z}\,\frac{dz^2}{dt^2};$$

donc

$$dt = \pm\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{hz - z^2}};$$

on prendra le signe — quand le mobile descendra, et le signe + quand il montera.

On trouve en intégrant, dans le cas du mouvement descendant,

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \text{arc cos} \frac{2z - h}{h}.$$

La constante est nulle, parce qu'on doit avoir à la fois $t = 0$, $z = h$; si l'on fait $z = 0$, on trouve

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Ainsi, de quelque point que le mobile parte, il arrivera au point le plus bas de la cycloïde dans le même temps; c'est ce qui a fait donner à cette courbe le nom de *tautochrone*. Si l'on intègre la valeur de dt à partir du point le plus bas, dans un sens ou dans l'autre, on aura des éléments égaux; ce qui montre qu'à des intervalles de temps égaux, à partir de cet instant, la position du mobile correspond à des valeurs égales de z. Il remontera donc à la hauteur h, où sa vitesse sera nulle, dans le même temps qu'il a mis à descendre, et la durée de l'oscillation sera

$$2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \quad \text{ou} \quad \pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Or, $4a$ est le rayon de courbure de la cycloïde au point le plus bas. La durée de l'oscillation sur la cycloïde, quelle que soit son amplitude, est donc la même qu'elle serait sur le cercle osculateur au point le plus bas, mais pour des amplitudes infiniment petites.

311. Si maintenant on considère une courbe quelconque dont le plan osculateur au point le plus bas soit vertical, on pourra la considérer dans une étendue infiniment petite de part et d'autre de ce point, comme se confondant avec le

cercle osculateur, et la durée de l'oscillation sur cette courbe sera $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, a étant le rayon du cercle, et l'amplitude étant supposée infiniment petite.

Si le plan osculateur faisait avec la verticale un angle α, la pesanteur pourrait se décomposer en deux forces : l'une normale au plan et détruite par sa résistance ; l'autre dans le plan et parallèle à la projection d'une verticale sur ce plan. Cette dernière sera égale à $g\cos\alpha$, et, par conséquent, la durée de l'oscillation sera $\pi\sqrt{\frac{a}{g\cos\alpha}}$. Elle est donc la même que sur une courbe dont le plan serait vertical et dont le rayon de courbure serait $\frac{a}{\cos\alpha}$, ou aurait pour projection sur le plan de la courbe donnée, celui de cette courbe même. Elle sera donc enfin la même que sur la courbe située dans un plan vertical passant par la tangente au point le plus bas de la courbe donnée, et qui serait la projection de cette courbe sur ce plan vertical.

312. Cherchons maintenant si la cycloïde est la seule courbe tautochrone, quand on fait abstraction de toute résistance.

Prenons pour origine le point où le mobile doit parvenir dans un temps constant, quel que soit le point de la courbe d'où il parte sans vitesse. Nous considérerons l'équation de la courbe entre s et z seulement ; car l'équation

$$v^2 = 2g(h-z), \quad \text{ou} \quad \frac{ds^2}{dt^2} = 2g(h-z),$$

ne renfermant que s, z et t, il s'ensuit que, pourvu qu'on ait la même relation entre s et z, on en tirera toujours la même valeur de t en fonction de z. De sorte que, si l'on conçoit le cylindre qui projette une courbe sur un plan

horizontal, un point matériel pesant mettra le même temps à parvenir d'un point à un autre de cette courbe, soit qu'on développe ce cylindre, soit qu'on l'enroule sur tout autre cylindre ayant ses arêtes verticales.

Il ne s'agit donc ici que de déterminer s en fonction de z, et nous ne considérerons que les courbes qui peuvent donner pour s un développement procédant suivant les puissances de z. Comme on doit avoir à la fois $z = 0$ et $s = 0$, il ne saurait y avoir d'exposant négatif, ni de terme indépendant de z. Soit donc

$$s = \mathrm{A} z^{\alpha} + \mathrm{B} z^{\beta} + \mathrm{C} z^{\gamma} + \ldots,$$

α, β, γ, etc., étant des nombres positifs quelconques, et A, B, C, etc., des quantités entièrement indéterminées. Soit h le z du point de départ, on aura

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g(h - z), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{T} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h - z}},$$

T désignant le temps employé pour parvenir à l'origine, et qui doit être indépendant de h.

Substituant à ds sa valeur tirée de la série, il vient

$$\mathrm{T}\sqrt{2g} = \mathrm{A}\alpha \int_0^h \frac{z^{\alpha - 1}\, dz}{\sqrt{h - z}} + \mathrm{B}\beta \int_0^h \frac{z^{\beta - 1}\, dz}{\sqrt{h - z}} + \ldots.$$

Soit

$$z = hz', \quad \text{d'où} \quad dz = h\, dz';$$

les limites de z' seront 0 et 1, et l'on aura

$$\int_0^h \frac{z^{\alpha - 1}\, dz}{\sqrt{h - z}} = h^{\alpha - \frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{z'^{\alpha - 1}\, dz'}{\sqrt{1 - z'}},$$

$$\int_0^h \frac{z^{\beta - 1}\, dz}{\sqrt{h - z}} = h^{\beta - \frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{z'^{\beta - 1}\, dz'}{\sqrt{1 - z'}},$$

et ainsi des autres. Il en résultera, en posant

$$\int_0^1 \frac{z'^{\alpha-1}\,dz'}{\sqrt{1-z'}} = \mathrm{A}', \quad \int_0^1 \frac{z'^{6-1}\,dz'}{\sqrt{1-z'}} = \mathrm{B}', \ldots,$$

$$\mathrm{T}\sqrt{2g} = \mathrm{AA}'\alpha h^{\alpha-\frac{1}{2}} + \mathrm{BB}'6 h^{6-\frac{1}{2}} + \ldots$$

Or, pour que ce résultat soit indépendant de h et ne soit pas zéro, il faut que tous les termes disparaissent, excepté un, dans lequel l'exposant de h sera zéro. Donc la série qui donne s se réduit à un seul terme, et l'exposant de z y est égal à $\frac{1}{2}$; on a donc

$$s = \mathrm{A} z^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ou} \quad s^2 = \mathrm{A}^2 z.$$

Or, cette relation entre s et z ne convient qu'à une cycloïde, dont le sommet est pris pour origine, et la perpendiculaire à la tangente en ce point, pour axe des z. Donc il n'y a d'autre tautochrone dans le vide que la cycloïde dans la position où nous l'avions considérée, du moins parmi toutes les courbes pour lesquelles s est développable suivant les puissances de z.

313. Cette propriété de l'*isochronisme* des oscillations d'un point qui se mouvrait sur une cycloïde avait fait penser à mesurer le temps au moyen d'un pendule-simple dont l'extrémité décrirait des arcs de cycloïde. Il suffirait, pour obtenir un pareil mouvement, de suspendre un poids au moyen d'un fil flexible et inextensible, à un point qui serait l'origine de deux branches de cycloïde dont le cercle générateur aurait pour diamètre la moitié de la longueur du fil. On voit, d'après la propriété de la développée de la cycloïde, que lorsque le fil s'enroulerait sur ces courbes, ou se déroulerait, son extrémité décrirait une cycloïde dont le sommet serait le point le plus bas; les oscillations seraient donc isochrones. Mais un pareil pendule serait loin

d'offrir dans la pratique les mêmes avantages que le pendule circulaire, et l'on n'en fait aucun usage.

CHAPITRE VI.

MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE SURFACE FIXE.

314. Soient $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface fixe, N l'intensité de la force qu'elle produit et que nous supposons normale; λ, μ, ν les angles que sa direction fait avec les axes, et X, Y, Z les composantes totales des forces accélératrices extérieures; on aura le système d'équations,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu,$$

$$\cos\lambda = V\frac{dF}{dx}, \quad \cos\mu = V\frac{dF}{dy}, \quad \cos\nu = V\frac{dF}{dz},$$

$$V = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}.$$

Le double signe de V correspond aux deux sens de la normale, et le calcul fera connaître en chaque point le signe qui conviendra.

Si l'on substitue dans les premières équations les valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, on aura

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = X + NV\frac{dF}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + NV\frac{dF}{dy}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = Z + NV\frac{dF}{dz}. \end{cases}$$

Éliminant N entre ces trois équations, on aura deux équations qui, jointes à $F(x, y, z) = 0$, détermineront x, y, z en fonction de t; et toutes les circonstances du mouvement en résulteront.

Ces calculs, en général impraticables, se simplifient quand on a

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\varphi(x, y, z),$$

et, par suite,

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C,$$

C désignant une constante arbitraire, déterminée par l'état initial.

En effet, les équations (1) donnent immédiatement les deux suivantes :

$$(2)\begin{cases} dx\,\dfrac{d^2y}{dt^2} - dy\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = Y\,dx - X\,dy + NV\left(\dfrac{dF}{dy}dx - \dfrac{dF}{dx}dy\right), \\ dx\,\dfrac{d^2z}{dt^2} - dz\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = Z\,dx - X\,dz + NV\left(\dfrac{dF}{dz}dx - \dfrac{dF}{dx}dz\right). \end{cases}$$

Or, en différentiant, par rapport à une variable quelconque, l'identité

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},$$

on trouve

$$d.\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,\dfrac{d^2y}{dt^2} - dy\,\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2},$$

d'où

$$dx\,\frac{d^2y}{dt^2} - dy\,\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 d.\frac{dy}{dx} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d.\frac{dy}{dx},$$

et de même

$$dx\,\frac{d^2z}{dt^2} - dz\,\frac{d^2x}{dt^2} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d.\frac{dz}{dx}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (2), et rem-

plaçant v^2 par $2\varphi(x, y, z) + C$, puis éliminant entre elles NV, on aura une équation différentielle entre x, y, z, où le temps n'entrera pas, et qui, conjointement avec $F(x, y, z) = 0$, déterminera la trajectoire. Connaissant y et z en fonction de x, et $\frac{ds}{dt}$ en fonction de x, y, z, on parviendra facilement à une équation de la forme $dt = \psi(x)\,dx$, d'où l'on déduira x en fonction de t, et, par suite, toutes les circonstances du mouvement.

315. *Pression exercée sur la surface.* — La composante normale de la résultante de toutes les forces appliquées au mobile, en y comprenant l'action de la surface, est dans le plan osculateur de la trajectoire, et égale à $\frac{v^2}{R}$. Cette dernière force est donc la résultante de la force produite par la surface, qui est normale à la surface et, par suite, à la trajectoire; et de la composante normale à la trajectoire, de la force extérieure qui agit sur le mobile. Si donc on désigne cette composante par Q, par θ l'angle du plan osculateur avec la normale à la surface, et par ψ celui de la force Q avec la même normale, on aura la proportion

$$\frac{v^2}{R} : Q :: \sin\psi : \sin\theta.$$

Cette relation déterminera la direction du plan osculateur quand on connaîtra v, R, Q, ψ. Dans le cas particulier où l'on aurait $Q = 0$, il en résulterait $\theta = 0$, et le plan osculateur serait le plan normal à la surface. Ce cas est celui où la force extérieure est nulle, ou tangente à la trajectoire: il comprend donc celui où il y aurait frottement sur la surface, ou une résistance de milieu. Dans ces divers cas, le plan osculateur de la trajectoire étant constamment normal à la surface, cette ligne est la plus courte que l'on puisse mener sur la surface entre deux quelconques de ses

points. On peut reconnaître directement que lorsque la force extérieure est nulle ou dirigée suivant la tangente à la trajectoire, le plan osculateur de cette courbe est normal à la surface. En effet, ce plan doit renfermer la tangente à la trajectoire et la résultante totale, c'est-à-dire une des composantes et la résultante : il renferme donc l'autre composante, qui est la normale à la surface, et, par conséquent, il est lui-même normal à la surface.

Application au mouvement d'un point pesant sur une sphère.

316. Soit l'équation de la sphère

$$(1)\qquad x^2+y^2+z^2=a^2\ldots;$$

les équations du mouvement seront

$$(2)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\pm\frac{\mathrm{N}x}{a},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\pm\frac{\mathrm{N}y}{a},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=g\pm\frac{\mathrm{N}z}{a},$$

l'axe des z étant supposé dans le sens de la pesanteur.

La vitesse sera donnée par l'équation

$$(3)\qquad v^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=c+2gz;$$

la constante c étant déterminée par la hauteur et la vitesse initiales du mobile.

L'équation des aires n'a plus lieu pour tous les plans ; mais, comme la résultante des forces qui agissent sur le point, coupe toujours l'axe des z, elle aura lieu pour le plan des x et y, comme nous l'avons dit précédemment. On aura donc, en désignant par c' une constante arbitraire,

$$(4)\qquad x\,dy-y\,dx=c'\,dt;$$

l'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$(5) \qquad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c + 2gz.$$

Les équations (1), (4), (5) suffisent pour déterminer x, y, z en fonction de t.

Différentiant d'abord l'équation de la sphère, nous aurons

$$(6) \qquad x\,dx + y\,dy = -z\,dz;$$

ajoutant les carrés des équations (4) et (6), il vient

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = z^2 dz^2 + c'^2 dt^2,$$

et en tirant $x^2 + y^2$ et $dx^2 + dy^2$ des équations (1) et (5), on obtiendra entre z et t l'équation

$$(a^2 - z^2)[(c + 2gz)\,dt^2 - dz^2] = z^2 dz^2 + c'^2 dt^2;$$

d'où l'on déduit

$$(7) \qquad dt = \frac{\pm a\,dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(c + 2gz) - c'^2}}.$$

Le signe $-$ correspond au cas où le mobile monte, et le signe $+$ à celui où il descend.

De là on tirerait, en intégrant,

$$t = F(z) \quad \text{ou} \quad z = F_1(t).$$

Il reste à déterminer la projection horizontale du mobile, soit par les coordonnées x et y, soit par des coordonnées polaires; nous nous arrêterons à ce dernier moyen.

L'équation $x\,dy - y\,dx = c'\,dt$ devient, en désignant par r le rayon vecteur de la projection, et par ψ l'angle qu'il fait avec l'axe des x,

$$(8) \qquad r^2 d\psi = c'\,dt \quad \text{et} \quad r^2 = a^2 - z^2;$$

donc, en se bornant au signe supérieur,

$$(9) \quad d\psi = \frac{c'\,dt}{a^2 - z^2} = \frac{ac'\,dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 - z^2)(c + 2gz) - c'^2}}.$$

Si l'on substitue à dt sa valeur en z et dz, ou si l'on suppose z exprimé au moyen de t par l'intégration précédente, une nouvelle quadrature fera connaître ψ en fonction de z ou de t : et comme on a

$$r^2 = a^2 - z^2 = F_2(t),$$

toutes les coordonnées du mobile seront connues en fonction de t. Mais ces diverses intégrations ne peuvent être calculées que par approximation.

Si l'on veut connaître l'angle que forme, avec la verticale, le rayon mené du centre de la sphère au point mobile, on aura, en le désignant par θ,

$$\cos\theta = \frac{z}{a}:$$

il sera donc connu quand z le sera.

317. Déterminons maintenant la constante c'. Pour cela, décomposons la vitesse initiale du point en deux autres, dont l'une soit perpendiculaire au plan vertical passant par ce point et le centre de la sphère, et l'autre soit comprise dans ce plan. La première sera la composante de la vitesse de la projection horizontale du point, suivant la perpendiculaire au rayon vecteur r de la courbe décrite par cette projection ; car cette perpendiculaire est normale au plan vertical dans lequel se trouve la seconde composante totale de la vitesse absolue du point, et par conséquent cette composante donne une projection nulle sur la perpendiculaire au rayon vecteur de la projection horizontale.

Soient, dans la position initiale du point, d la valeur de z, h la vitesse, qui est nécessairement tangente à la

sphère, et α l'angle que fait sa direction avec la perpendiculaire au plan vertical qui passe par le point et le centre de la sphère; on aura, d'après ce qui vient d'être dit,

$$r\frac{d\psi}{dt} = k\cos\alpha,$$

et, substituant à $\frac{d\psi}{dt}$ sa valeur tirée de l'équation (8),

$$\frac{c'}{r} = k\cos\alpha;$$

comme on a, au point de départ, $r = \sqrt{a^2 - d^2}$, la valeur de c' sera

$$(10)\qquad c' = k\sqrt{a^2 - d^2}\cos\alpha.$$

Si la vitesse initiale est nulle, ou dirigée dans le plan vertical passant par le centre, on a $c' = 0$, et l'on retrouve les équations du mouvement du pendule simple dans un plan vertical.

318. Il reste à calculer à chaque instant la grandeur et le sens de la force N que produit la surface. Pour obtenir sa valeur de la manière la plus simple, nous multiplierons les équations (2), la première par x, la deuxième par y, la troisième par z, et nous les ajouterons; il en résultera

$$(11)\qquad \frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = \pm Na + gz.$$

Or, on a

$$xdx + ydy + zdz + 0,$$

et, en différentiant,

$$xd^2x + yd^2y + zd^2z = -dx^2 - dy^2 - dz^2 = -ds^2;$$

l'équation (11) devient donc

$$-v^2 = \pm Na + gz,$$

d'où

$$(12) \qquad \pm N = -\frac{v^2 + gz}{a},$$

et comme N est essentiellement positif, on verra, d'après les valeurs de v et z à chaque instant, lequel des deux signes du premier membre on doit prendre pour que cette équation ne soit pas absurde; on saura ainsi quels signes il faut prendre à cet instant dans les équations (3), et, par conséquent, quel est le sens de la force produite par la surface.

Si z est positif, le second membre de l'équation (12) est négatif, et l'on doit prendre le signe inférieur dans le premier membre; d'où il résulte que la surface produit sur le point une force dirigée de la surface vers le centre, toutes les fois qu'il est situé au-dessous du plan horizontal mené par le centre de la sphère.

Si z est négatif, c'est-à-dire si le point est au-dessus de ce même plan horizontal, les deux termes du second membre de l'équation (12) sont de signes contraires, et le résultat peut être négatif, nul ou positif. On prendra encore le signe inférieur de N si l'on a

$$-gz < v^2;$$

la force N sera nulle quand on aura

$$-gz = v^2,$$

et l'on devra prendre le signe supérieur lorsque l'on aura

$$-gz > v^2;$$

dans ce dernier cas, la surface produit sur le point une force dirigée vers l'extérieur de la sphère, et, par conséquent, le point fait effort pour s'approcher du centre.

On peut se rendre compte directement de ces diverses

conditions relatives au sens de la force N ; il suffit, pour cela, de se rappeler que la résistance de la surface sur laquelle un point est en mouvement détruit la composante suivant la normale à cette surface, tant des forces appliquées au point que de la force centrifuge.

Cela posé, soit R le rayon du cercle suivant lequel le plan osculateur en un point quelconque de la trajectoire coupe la sphère, et qui n'est autre chose que le cercle osculateur de cette courbe : la force centrifuge sera $\frac{v^2}{R}$, et il faudra la multiplier par $\frac{R}{a}$ pour avoir sa composante suivant le rayon de la sphère, qui passe au même point. On a ainsi $\frac{v^2}{a}$, et cette force est dirigée suivant la partie extérieure de la normale à la sphère. Quant à la composante normale de la pesanteur, elle est dirigée suivant la partie extérieure de la normale lorsque le point est dans l'hémisphère inférieur, et vers le centre lorsque le point est dans l'hémisphère supérieur. Donc, en la considérant comme positive quand elle est dirigée à l'extérieur, et comme négative dans la direction contraire, elle sera exprimée par $\frac{gz}{a}$; de sorte que $\frac{v^2+gz}{a}$ sera la pression détruite par la surface, et le signe de cette expression indiquera le sens de cette force comme nous venons de l'expliquer. Il suit de là que la surface remplace une force égale et opposée, et, par conséquent, représentée par $-\frac{v^2+gz}{a}$, le signe étant entendu de la même manière. Ainsi, dans l'hémisphère inférieur, cette expression étant évidemment négative, la force produite par la surface est dirigée vers le centre. Dans l'autre hémisphère, elle sera encore dirigée vers le centre si l'on a

$$v^2+gz>0\,;$$

elle aura la direction contraire lorsque $v^2 + gz$ sera < 0. On retombe ainsi sur les résultats déjà obtenus.

319. *Mouvement d'un pendule qui s'écarte très-peu de la verticale.* — Le mouvement du point sur la sphère peut être réalisé en supposant ce point lié au centre par une ligne inflexible et sans masse. Ainsi, le problème que nous venons de traiter est celui du pendule simple, considéré de la manière la plus générale. Les calculs peuvent s'exécuter complétement lorsque le pendule fait toujours un très-petit angle avec la verticale menée par le point de suspension.

Soient θ l'angle variable que forme la direction du pendule avec celle de la pesanteur, α sa valeur initiale correspondante à $z = d$, et supposons que la vitesse initiale k ait une direction horizontale, auquel cas la valeur c' devient

$$c' = k\sqrt{a^2 - d^2}.$$

En négligeant les quantités très-petites du troisième ordre et des ordres supérieurs, devant celles du second, nous aurons

$$-z = a\cos\theta = a - \frac{a\theta^2}{2}, \quad -d = a\cos\alpha = a - \frac{a\alpha^2}{2},$$

$$c = k^2 - 2ga + ga\alpha^2, \qquad c'^2 = k^2a^2\sin^2\alpha = k^2a^2\alpha^2.$$

La formule (7) deviendra

$$dt = \pm\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\theta\, d\theta}{\sqrt{-\theta^4 + \left(\frac{k^2}{ga} + \alpha^2\right)\theta^2 - \frac{k^2\alpha^2}{ag}}},$$

et posant $\frac{k^2}{ga} = 6^2$,

(13) $$dt = \pm\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\theta\, d\theta}{\sqrt{(\alpha^2 - \theta^2)(\theta^2 - 6^2)}},$$

d'où l'on voit déjà que θ restera constamment compris entre α et β. Il en résulte que si l'on a $\beta = \alpha$, on aura constamment $\theta = \alpha$; le pendule décrira donc un cône de révolution autour de la verticale, et le point matériel décrira un cercle horizontal. Quant à l'angle ψ, la formule générale

$$r^2 d\psi = c' dt \quad \text{devient} \quad d\psi = \frac{k\alpha}{a\theta^2} dt,$$

et comme $\theta = \alpha = \beta$, elle se réduit à

$$d\psi = \sqrt{\frac{g}{a}} dt,$$

d'où l'on tire, en faisant commencer l'angle ψ en même temps que t, $\psi = t\sqrt{\frac{g}{a}}$. Ainsi, dans ce cas, le mouvement du pendule est uniforme, et il décrit la surface conique entière dans un temps égal à $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

Revenons à l'équation (13) qui est évidemment intégrable; mettons-la sous la forme

$$dt = \pm\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{\theta\, d\theta}{\sqrt{-\left(\theta^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{4}}},$$

et posons

$$2\theta^2 - \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2) u,$$

il en résultera

$$dt = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}},$$

d'où

$$t + c_1 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} . \operatorname{arc} \cos u.$$

La constante c_1 se déterminera en exprimant que $t = 0$ donne $\theta = \alpha$, et par suite $x = 1$; il en résultera

$$c_1 = 0, \quad \text{et} \quad t = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.\text{arc}\cos u,$$

ou

$$u = \cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

d'où l'on conclura pour θ^2 la valeur suivante :

$$\theta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\cos.2t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

ou

(14) $$\theta^2 = \alpha^2\cos^2.t\sqrt{\frac{g}{a}} + \beta^2\sin^2.t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

On reconnaît immédiatement que θ^2 est périodique, et que la durée de la période est $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Pour $t = 0$, on a

$$\theta^2 = \alpha^2;$$

pour $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, c'est-à-dire au milieu de la période, on a

$$\theta^2 = \beta^2;$$

et lorsque $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, on retrouve

$$\theta^2 = \alpha^2.$$

De sorte qu'un observateur qui se mouvrait avec le plan vertical qui contient le pendule, verrait osciller ce dernier entre les deux directions faisant avec la verticale, et d'un même côté, les angles α, β. Le temps qu'il mettrait pour arriver de l'une à l'autre serait $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$; mais, au milieu

de cet intervalle, il ne serait pas à égale distance de ces deux droites, et l'on aurait à cet instant

$$\theta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2};$$

ce qui donne pour θ une valeur plus grande que la moyenne $\frac{\alpha + \beta}{2}$.

Il reste à connaître ψ en fonction de t. Or, on a

$$r^2 d\psi = c' dt, \quad \text{ou} \quad d\psi = \frac{k\alpha dt}{a\theta^2} = \frac{\alpha\beta\sqrt{\frac{g}{a}}\,dt}{\theta^2}.$$

Remettant pour θ^2 sa valeur en t, il vient

$$(15) \qquad d\psi = \alpha\beta\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{dt}{\alpha^2 \cos^2 . t\sqrt{\frac{g}{a}} + \beta^2 \sin^2 . t\sqrt{\frac{g}{a}}}.$$

Pour intégrer cette expression, nous poserons, d'après la méthode ordinaire, $\text{tang} . t\sqrt{\frac{g}{a}} = v$, et nous obtiendrons

$$d\psi = \frac{\alpha\beta\, dv}{\alpha^2 + \beta^2 v^2},$$

d'où l'on déduit

$$\psi = \text{arc tang}\frac{\beta v}{\alpha}.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, parce que l'on doit avoir en même temps

$$v = 0, \quad \psi = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{\beta v}{\alpha} = \text{tang}\,\psi,$$

ou

$$\text{(16)} \qquad \tan\psi = \frac{\beta}{\alpha} \tan . t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

On voit que l'angle ψ ne croît pas uniformément; il prend successivement les valeurs π, 2π, 3π, ..., $n\pi$, pour les valeurs successives de t qui rendent le second membre nul; ces valeurs sont $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \ldots, n\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Aux milieux de ces divers intervalles de temps, le second membre devient infini; le premier le devient donc aussi, et les valeurs de ψ sont $\frac{1}{2}\pi$, $\pi + \frac{1}{2}\pi, \ldots$; de sorte que le plan vertical qui contient le pendule se trouve perpendiculaire à sa position initiale. Ainsi, les quatre quarts de la révolution de ce plan sont parcourus dans des intervalles de temps égaux à $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$: et, pendant chacun d'eux, le pendule accomplit dans son plan vertical une oscillation qui l'amène de l'une à l'autre des deux directions extrêmes qui font avec la verticale les angles α et β.

On peut encore remarquer que le plan vertical du pendule met toujours le même temps à parcourir deux angles droits, à partir d'une quelconque de ses positions.

320. Si l'on veut connaître le mouvement de la projection du point sur le plan horizontal, il faut obtenir en fonction de t, soit r et ψ, soit x et y.

D'abord l'équation (16) fait connaître ψ; et pour avoir r, il suffira de recourir à la formule

$$r^2 d\psi = c' dt = ka\alpha dt,$$

et de substituer à $\frac{dt}{d\psi}$ sa valeur tirée de l'équation (15); on trouvera ainsi

$$\text{(17)} \qquad r^2 = a^2\left(\alpha^2 \cos^2 . t\sqrt{\frac{g}{a}} + \beta^2 \sin^2 . t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

Les équations (16) et (17) résolvent la question. On obtiendra l'équation de la projection de la trajectoire sur le plan horizontal, en éliminant t entre ces équations, ce qui conduit à

$$r^2 = \frac{a^2\alpha^2 6^2}{\alpha^2 \sin^2\psi + 6^2 \cos^2\psi}.$$

Il est facile d'y reconnaître l'équation d'une ellipse. On l'aura en coordonnées rectangles en posant

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi;$$

elle devient ainsi

$$\alpha^2 y^2 + 6^2 x^2 = a^2\alpha^2 6^2.$$

Ses demi-axes sont $a\alpha$, $b6$; ils sont renfermés dans deux plans verticaux rectangulaires, dont l'un passe par le point de départ.

Enfin, si l'on veut avoir x et y en fonction de t, il suffira de substituer dans les formules

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi,$$

la valeur de r donnée par l'équation (17) et les valeurs de $\cos\psi$, $\sin\psi$ qu'on tirera de l'équation (16).

On trouve ainsi

$$x^2 = a^2\alpha^2\cos^2.t\sqrt{\frac{g}{a}}, \quad y^2 = a^2 6^2 \sin^2.t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

On peut faire ici une remarque qui se rapporte à un principe général dont nous parlerons plus tard. Elle tient à ce que la valeur de x ne dépend pas de 6, ni celle de y de α. Il suit de là que le mouvement projeté sur l'axe des x est le même que si 6 était nul, et que le pendule écarté de la verticale d'un angle α fût abandonné sans vitesse initiale à l'action de la pesanteur. Semblablement, le mouvement projeté sur

l'axe des y est le même que si le pendule partait de la verticale avec la vitesse initiale donnée, qui se trouvera dirigée suivant l'axe des y. Ainsi ces deux causes de mouvement, savoir, l'écartement de la verticale et la vitesse initiale, produisent séparément leur effet; et l'on a la position du mobile à un instant quelconque, en composant les déplacements correspondants à ce même instant, dans les deux mouvements qui seraient produits respectivement par chacune des deux causes agissant isolément.

CHAPITRE VII.

TRAVAIL D'UNE FORCE. — FORCE VIVE.

321. Pour faire comprendre simplement l'origine de la dénomination de *travail*, supposons que l'on emploie des hommes à élever directement, d'un mouvement uniforme, du minerai du fond d'un puits à la surface du sol. Il est évident que chacun de ces hommes fera constamment un même effort égal au poids du corps qu'il élève; le temps pendant lequel il devra être employé sera évidemment proportionnel au poids total qu'on veut qu'il élève, et à la hauteur dont il aura été élevé. Ainsi, ce que l'on appelle vulgairement le travail de chacun de ces hommes, et, par suite, la dépense, sera une quantité proportionnelle à ce poids et à la hauteur; c'est-à-dire à la force verticale qui agit, et à la quantité dont s'élève son point d'application.

C'est d'après des considérations de ce genre qu'on a été conduit à donner le nom de *travail d'une force* au produit de cette force par le chemin parcouru par son point d'application, lorsqu'il est déplacé suivant la direction de cette force.

En examinant le cas moins simple où le point d'application de la force ne se meut pas dans la direction de cette force, on a reconnu, comme nous le ferons voir plus tard, que l'utilité produite et la dépense occasionnée sont pro-

portionnelles au produit de la force par le chemin parcouru par son point d'application dans le sens de la force; ou, en d'autres termes, par la projection de ce chemin sur la direction de la force. C'est à ce produit qu'on a donné généralement le nom de *travail de la force*.

D'après cette définition, le travail sera mesuré par le nombre 1 lorsque la force sera égale à l'unité, et que son point d'application se déplacera d'une longueur égale à l'unité dans le sens de la force. Ainsi l'unité de travail est le travail correspondant à un poids de 1 kilogramme élevé verticalement de 1 mètre.

C'est dans le calcul de l'effet des machines que la considération du travail se présente le plus naturellement. Mais nous croyons devoir en parler dès à présent, parce que les remarques que nous ferons dans des cas simples, prépareront naturellement aux considérations plus générales que nous devons renvoyer après l'étude du mouvement des systèmes. La quantité de travail d'une force est regardée comme positive lorsque la projection du déplacement du point est dans la direction de la force, ou lorsque le déplacement fait un angle aigu avec cette direction. Il est négatif dans le cas contraire, qui est celui de l'angle obtus; il est nul si l'angle est droit, c'est-à-dire si le point ne se meut ni dans le sens de la force ni en sens contraire.

Si la force n'est pas constante, on est obligé, pour calculer le travail produit d'après la définition précédente, de partager le mouvement en intervalles infiniment petits, pendant chacun desquels la force pourra être considérée comme constante; et le travail total sera la somme des *quantités élémentaires de travail*, c'est-à-dire l'intégrale $\int P\,ds \cos\varphi$ prise entre les deux limites extrêmes; P désignant la force variable, ds l'élément de la courbe décrite, et φ l'angle de la direction du mouvement avec celle de la force P.

Telle est la manière dont nous entendrons toujours, tant

en signe qu'en grandeur, le travail, élémentaire ou fini, d'une force quelconque.

322. *Nouvel énoncé du principe des vitesses virtuelles.* — On voit que le moment virtuel d'une force ne diffère pas de la quantité de travail élémentaire de cette force correspondante au déplacement virtuel de son point d'application. On peut donc énoncer de cette manière le principe des vitesses virtuelles :

Lorsqu'un système quelconque de points est en équilibre, la somme algébrique des quantités de travail de toutes les forces est nulle pour tout déplacement infiniment petit, compatible avec les liaisons du système.

Et, réciproquement, si cette somme est nulle pour tout déplacement possible, le système est en équilibre.

323. *Travail de la résultante de forces quelconques.* — Lorsque des forces appliquées à un système rigide ont une résultante, elles se trouveraient en équilibre si l'on introduisait une force égale et opposée à cette dernière. La somme des quantités de travail virtuelles serait donc nulle, et, par conséquent, le travail virtuel de la force introduite est égal, au signe près, à la somme de ceux qui correspondent aux forces données. Et comme cette force et la résultante, étant égales et contraires, donnent des quantités de travail égales et de signes contraires, on arrive à cette conséquence :

Le travail de la résultante de forces appliquées à un système rigide quelconque est égal à la somme des travaux des composantes pour tout déplacement infiniment petit de ce système.

Dans cet énoncé, les forces sont considérées comme nécessairement positives. Or il est souvent utile d'introduire les composantes des forces parallèlement aux axes de coordonnées, et l'on a alors à traiter des forces positives ou négatives. Nous avons discuté cette question (n° 89) pour les

moments virtuels : il est donc inutile d'y revenir pour les quantités de travail, qui n'en diffèrent pas, et la quantité élémentaire de travail, positive ou négative, d'une force qui a pour composantes X, Y, Z, sera

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

dx, dy, dz étant les composantes, positives ou négatives, du déplacement du point d'application de cette force.

324. *Force vive.* — Considérons d'abord le mouvement rectiligne d'un point ayant pour masse m, et soumis à l'action d'une force motrice F. On aura l'équation

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \text{F}.$$

Le travail élémentaire de cette force correspondant à l'espace parcouru dx est $\text{F}\,dx$; et l'équation précédente donne

$$(1)\qquad \text{F}\,dx = m\,\frac{d^2x}{dt^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\,d.mv^2,$$

v désignant toujours la vitesse, ou $\frac{dx}{dt}$. On voit donc que l'accroissement infiniment petit du travail de la force est égal à la moitié de l'accroissement de la quantité mv^2. On a donné à cette quantité mv^2 le nom de *force vive* du mobile. Cette dénomination est impropre, puisque le produit d'une masse par le carré d'une vitesse n'a aucun rapport avec la mesure d'une force; mais nous la conserverons pour éviter les inconvénients attachés au changement de nom, et parce que d'ailleurs elle ne peut induire en erreur, dès qu'on s'est bien entendu sur sa signification.

L'équation (1) peut s'énoncer de la manière suivante :

Dans le mouvement rectiligne d'un point libre, le travail élémentaire de la force qui agit sur lui, est égal à la moitié de l'accroissement correspondant de la force vive de ce mobile.

Si la force F varie d'une manière quelconque avec la

position du point, et même avec le temps, la proposition précédente aura toujours lieu pour les intervalles infiniment petits, dans lesquels on pourra décomposer, soit un temps, soit un espace fini. Désignons par v_0 et v les valeurs de la vitesse au commencement et à la fin de cet intervalle, on aura, en faisant la somme des équations (1) relatives à tous les éléments qui le composent,

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int F\, dx. \tag{2}$$

La somme $\int$ pourra s'effectuer si F ne dépend que de x, et si, dans ce cas, on désigne par $\varphi(x)$ la fonction dont la dérivée par rapport à x est F, et par x_0 et x les valeurs extrêmes de l'abscisse, l'équation précédente devient

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Mais dans tous les cas possibles, comme le second membre $\int F\, dx$ est la somme des quantités de travail, positives ou négatives produites, dans tous les intervalles infiniment petits, et, par conséquent, le travail total produit dans l'intervalle fini, l'équation (2) peut s'énoncer ainsi :

Dans le mouvement rectiligne d'un point matériel libre, le travail de la force dans un intervalle quelconque est égal à la moitié de l'accroissement correspondant de la force vive du mobile.

325. *Relation entre la force vive et le travail, dans le mouvement général d'un point.* — 1°. Supposons d'abord le point libre et sollicité par une force motrice F dont les composantes parallèles aux axes soient X, Y, Z; les équations de son mouvement seront, en désignant par m sa masse,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z. \tag{1}$$

Or, d'après ce que nous avons démontré (n° 323), le travail de la force F, pour un déplacement ayant pour

composantes dx, dy, dz, est

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

expression que l'on obtiendra en ajoutant les équations (1), après avoir multiplié la première par dx, la seconde par dy et la troisième par dz. On trouve ainsi

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2y}{dt^2}\,dy + \frac{d^2z}{dt^2}\,dz\right),$$

ou

$$(2)\qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \tfrac{1}{2}\,d.mv^2.$$

Le premier membre est le travail de la force F, ou la somme algébrique des quantités de travail des forces dont F serait la résultante. L'équation (2) exprime donc le théorème suivant :

Dans le mouvement d'un point libre, la somme des quantités élémentaires de travail, relatives aux différentes forces qui y sont appliquées, est égale à la moitié de l'accroissement correspondant de la force vive du mobile.

Cette égalité ayant lieu pour tout intervalle infiniment petit, a lieu pour une somme quelconque d'intervalles, et, par conséquent, pour un intervalle fini ; ce qui donne la proposition suivante :

La somme des quantités de travail des différentes forces appliquées à un point matériel libre, pendant un temps fini quelconque, est égale à la moitié de l'accroissement de la force vive de ce point, dans ce même intervalle.

Lorsque les composantes totales X, Y, Z seront les dérivées partielles d'une même fonction $\varphi(x, y, z)$, l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ sera égale à $d.\varphi(x, y, z)$, et l'équation (2) pourra être intégrée. En désignant pas x_0, y_0, z_0, v_0 les valeurs de x, y, z, v relatives au commencement de l'intervalle arbitraire que l'on considère, l'équation (2), intégrée jusqu'à une limite quelconque, corres-

pondante aux coordonnées x, y, z, donnera

$$(3)\qquad \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2 = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

2°. Supposons maintenant le point assujetti à rester sur une courbe ou une surface fixe, qui n'exerce sur lui aucun frottement, et qui ne produit, par conséquent, qu'une force normale à la trajectoire. Soient encore X, Y, Z les composantes totales des forces extérieures qui agissent sur le point.

En joignant à ces dernières forces, celle que produit la courbe ou la surface, le point peut être considéré comme libre, et l'équation (2) s'appliquera, en comprenant la force normale parmi toutes celles qui entrent dans le premier membre. Mais le travail élémentaire d'une force normale à la trajectoire est nul, puisque la projection de l'arc infiniment petit sur la normale est nul. Il ne reste donc dans le premier membre que le travail des forces extérieures ; et l'on a encore, dans ce cas,

$$(4)\qquad \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = \tfrac{1}{2} d.mv^2,$$

et si

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = d.\varphi(x, y, z),$$

il s'ensuivra

$$(5)\qquad \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2 = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

On voit donc que *la relation entre le travail des forces extérieures et la force vive d'un point matériel, est la même, soit que ce point soit libre, soit qu'il se meuve sur une courbe ou une surface fixe, sans frottement.*

Si la pesanteur est la seule force extérieure, on a

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = -mg,$$

et l'équation (5) devient

$$\tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2 = mg(z_0 - z).$$

On retrouverait ici les propositions démontrées dans le n° 263; il est inutile de les reproduire de nouveau.

CHAPITRE VIII.

PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION.

326. Lorsqu'un point libre, ou assujetti à se mouvoir sur une surface fixe, est soumis à l'action de forces telles que l'on ait

$$X dx + Y dy + Z dz = d.\varphi(x, y, z),$$

et, par suite,

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C,$$

la courbe qu'il décrit jouit de la propriété remarquable, qu'en prenant pour v cette valeur en x, y, z, l'intégrale $\int v ds$, prise entre deux points quelconques A et B de cette courbe, est moindre qu'elle ne le serait pour toute autre courbe terminée aux deux points A, B, et assujettie à rester sur la surface fixe, quand le point s'y trouve lui-même assujetti. Il s'agit donc de démontrer que $\int\sqrt{2\varphi(x, y, z) + C}.\, ds$ est un minimum quand x, y, z satisfont aux équations de la trajectoire; et pour cela il faut prouver que la variation $\delta \int v ds$ est nulle, v représentant $\sqrt{2\varphi(x, y, z) + C}$. Remarquons d'ailleurs que si l'on fixait la courbe quelconque que l'on considère entre A et B, et qu'on assujettît le point matériel à y rester, en le soumettant à l'action des mêmes forces extérieures, sa vitesse serait toujours donnée par la même formule $\sqrt{2\varphi(x, y, z) + C}$. Or le calcul des variations donne

$$\delta \int v ds = \int \delta(v ds) = \int(\delta v ds + v \delta ds),$$

toutes ces intégrales étant prises entre les deux points A

et B. Or

$$\delta v\, ds = v\,\delta v\, dt = \tfrac{1}{2}\delta(v^2)\, dt,$$

et l'équation

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C$$

donne

$$\tfrac{1}{2}\delta(v^2) = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z;$$

et il faut remarquer que dans X, Y, Z les valeurs de x, y, z se rapportent aux points de la trajectoire, et que $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ sont celles des points correspondants de la courbe infiniment voisine.

Si le point est assujetti à rester sur une surface fixe, on a à chaque instant

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu;$$

et s'il est libre, il suffira de supposer $N = 0$ dans ces équations, qui peuvent ainsi représenter les deux cas. On en déduit

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z$$
$$- N(\delta x\cos\lambda + \delta y\cos\mu + \delta z\cos\nu).$$

Or, la dernière partie du second membre est nulle si le point est libre, parce qu'alors $N = 0$. Elle est nulle encore si le point étant assujetti à rester sur une surface fixe, la courbe infiniment voisine est aussi assujettie à s'y trouver, parce que la droite qui joint deux points correspondants étant perpendiculaire à la normale dont les angles avec les axes sont λ, μ, ν, on a

$$\delta x\cos\lambda + \delta y\cos\mu + \delta z\cos\nu = 0.$$

On aura donc, dans ces deux cas,

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z,$$

et, par suite,

$$\delta v . ds = dt \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right).$$

Maintenant de l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

on déduit

$$ds \, \delta \, ds = dx \, \delta \, dx + dy \, \delta \, dy + dz \, \delta \, dz;$$

d'où, en divisant par dt, et intervertissant les caractéristiques δ et d,

$$v \, \delta \, ds = \frac{dx}{dt} d \delta x + \frac{dy}{dt} d \delta y + \frac{dz}{dt} d \delta z.$$

Réunissant les deux parties de la variation de $\int v ds$, on obtient

$$\delta \int v ds = \int d \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right)$$
$$= \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right),$$

et cette dernière expression doit être prise aux deux limites de l'intégrale. Or, elle y est nulle, puisque les deux points extrêmes étant fixes, δx, δy, δz y sont nuls; et il suffirait même que le déplacement de ces deux points s'effectuât suivant une direction perpendiculaire à la trajectoire, pour que l'on eût, en chacun d'eux,

$$\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z = 0.$$

La variation $\delta \int v ds$ étant nulle, l'intégrale $\int v ds$ sera, en général, minimum ou maximum. La question ne comporte pas de maximum; mais il pourrait se faire qu'il n'y eût pas non plus minimum.

327. Quand le mobile est assujetti à rester sur une surface fixe et n'est sollicité par aucune force extérieure,

sa vitesse est constante, et $\int v ds = vs$; donc l'arc parcouru est un minimum entre deux quelconques de ses points, et, par conséquent, le temps employé à le parcourir est aussi minimum.

328. *Application au mouvement d'un point.* — La trajectoire décrite par un point libre, ou assujetti à rester sur une surface, satisfaisant à la condition de minimum pour l'intégrale $\int v ds$, lorsque l'on a

$$X dx + Y dy + Z dz = d.\varphi(x, y, z),$$

on peut, en exprimant cette condition, parvenir aux équations de cette ligne. Considérons d'abord le cas d'un point libre.

En mettant pour v sa valeur tirée de l'équation

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C,$$

il faudra écrire les conditions de minimum de l'intégrale

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \sqrt{2\varphi(x, y, z) + C}.$$

Les règles du calcul des variations conduisent aux équations suivantes :

$$\frac{X ds}{v} = d\left(v \frac{dx}{ds}\right), \quad \frac{Y ds}{v} = d\left(v \frac{dy}{dz}\right), \quad \frac{Z ds}{v} = d\left(v \frac{dz}{ds}\right).$$

On sait que ces trois équations se réduisent à deux, et ce sont celles de la trajectoire, en remplaçant v par sa valeur en x, y, z. Si l'on effectue les différentiations, en prenant s pour variable indépendante, on obtient

$$X = v^2 \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{dx}{ds}\left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}\right),$$

$$Y = v^2 \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}\right),$$

$$Z = v^2 \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}\right).$$

Si l'on multiplie la première par $\frac{dy}{ds}$, la seconde par $\frac{dx}{ds}$, et qu'on les retranche; qu'ensuite on multiplie la première par $\frac{dz}{ds}$ et la troisième par $\frac{dx}{ds}$, et qu'on les retranche, on aura les deux équations suivantes, qu'on pourra encore considérer comme celles de la trajectoire:

$$\mathrm{Y}\frac{dx}{ds} - \mathrm{X}\frac{dy}{ds} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{d.\frac{dy}{dx}}{ds},$$

$$\mathrm{Z}\frac{dx}{ds} - \mathrm{X}\frac{dz}{ds} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{d.\frac{dz}{dx}}{ds}.$$

Si l'on veut prendre x pour variable indépendante, et qu'on multiplie les deux membres de ces équations par $\frac{ds}{dx}$, on aura

$$\mathrm{Y} - \mathrm{X}\frac{dy}{dx} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\mathrm{Z} - \mathrm{X}\frac{dz}{dx} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \frac{d^2z}{dx^2}.$$

Ces équations rentrent dans celles que nous avions déjà obtenues en partant des équations du mouvement d'un point sur une surface; il suffira, pour les en déduire, de supposer nulle la force provenant de la surface. On les intégrera après avoir remplacé v^2 par $2\varphi(x, y, z) + \mathrm{C}$, et X, Y, Z par leurs valeurs données en fonction de x, y, z.

Le principe de la moindre action donnerait de même les équations de la trajectoire quand le point est assujetti à se mouvoir sur une surface fixe.

329. Si l'on considère un point libre sollicité vers un centre fixe par une force dépendante seulement de la distance, la courbe est plane, et l'on peut se borner à deux

coordonnées x, y; de plus, $X dx + Y dy$ est une différentielle exacte, de sorte que le principe de la moindre action a lieu, et on peut l'appliquer à la détermination de la trajectoire. Mais, dans ce cas, il sera plus simple d'employer un système de coordonnées polaires r, θ en prenant pour pôle le centre d'action.

Soit φ la force dirigée vers le centre, on aura, en supposant la constante renfermée dans l'intégrale indéfinie,

$$v^2 = -2\int \varphi\, dr, \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2},$$

et l'intégrale qu'il faudra rendre minimum sera

$$\int \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} \sqrt{-2\int \varphi\, dr}.$$

Le calcul des variations conduit à l'équation

$$d.\frac{r^2 d\theta \sqrt{-2\int \varphi\, dr}}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = 0,$$

ou

$$\frac{r^2 d\theta \sqrt{-2\int \varphi\, dr}}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = c;$$

c désignant une constante arbitraire.

On tire de là

$$\int \varphi\, dr = -\frac{c^2}{2}\left(\frac{dr^2}{r^4 d\theta^2} + \frac{1}{r^2}\right),$$

ou

$$\int \varphi\, dr = -\frac{c^2}{2}\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d.\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right].$$

La force φ étant donnée en fonction de r, $\int \varphi\, dr$ sera une fonction connue de r, et l'on aura ainsi l'équation polaire de la trajectoire, que nous retrouverons plus tard par une autre méthode.

CHAPITRE IX.

DES FORCES QUI PEUVENT PRODUIRE LE MOUVEMENT RELATIF D'UN POINT.

330. Le problème que nous nous proposons est celui-ci : *Étant données les forces et les diverses conditions par lesquelles est déterminé le mouvement absolu d'un point matériel; étant donné en outre le mouvement absolu d'un système rigide : trouver les forces et les diverses conditions qui détermineraient sur ce point un mouvement absolu, identique à son mouvement relatif au système.*

Ainsi, nous voulons faire rentrer la considération du mouvement relatif dans la considération plus simple du mouvement absolu; et nous cherchons comment il faut modifier les données du mouvement absolu du mobile pour que le mouvement absolu qui en résultera soit identique à celui que ce point a par rapport au système.

Soient AX, AY, AZ trois axes fixes de coordonnées, et A'X', A'Y', A'Z' trois axes liés au système, et auxquels nous rapportons les positions du mobile; de sorte que son mouvement absolu est déterminé par les valeurs successives de x, y, z; et son mouvement relatif au système, par les valeurs de x', y', z'.

L'état initial donné, tant pour le point que pour le système, que nous réduirons aux axes mêmes X', Y', Z', fera connaître à ce même instant l'état initial relatif; c'est-à-dire les valeurs de x', y', z', $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$.

Ainsi déjà on connaît l'état initial du point dans le mouvement absolu qui serait identique au mouvement relatif en question. Il ne reste donc plus qu'à déterminer la force accélératrice qui doit être appliquée à chaque instant au point dans ce mouvement absolu.

Or nous savons comment, dans tout mouvement absolu, la force accélératrice est déterminée, en grandeur et en direction, par la déviation. En appliquant cette règle à la déviation relative du point, qui n'est autre chose que la déviation dans le mouvement absolu que nous cherchons, nous connaîtrons la force qu'il faudra supposer appliquée au mobile partant d'un état initial identique à son état initial relatif, pour avoir un mouvement absolu identique à son mouvement relatif. Et c'est cette force que nous désignerons sous le nom de *force relative*. Il suffira donc, pour avoir la solution de la question qui nous occupe, de se rappeler la décomposition que nous avons faite précédemment, de la déviation relative (n° 243).

Cette décomposition étant faite suivant la même loi que celle des forces, si nous représentions la force par la déviation, les composantes de la force seraient représentées par celles de la déviation. Mais ce n'est pas par la déviation même que nous mesurons la force accélératrice, c'est par l'accélération du mouvement par lequel elle est censée décrite, c'est-à-dire par le quotient de cette déviation par $\frac{\theta^2}{2}$; θ désignant l'intervalle de temps correspondant à la déviation. Donc on aura les composantes de la force accélératrice relative en divisant par $\frac{\theta^2}{2}$ les composantes de la déviation relative. On obtient ainsi la proposition suivante:

La force accélératrice relative est la résultante de trois autres forces accélératrices.

La première est la force donnée elle-même.

La deuxième est la force d'inertie développée par le point du système, qui coïncide avec le mobile, à l'instant que l'on considère.

La troisième a pour valeur $2\,\omega\, v_0 \sin\delta$; v_0 *désignant la vitesse relative du mobile,* ω *la vitesse angulaire du*

système autour de son axe instantané de rotation, et δ l'angle que fait la direction de la vitesse relative avec l'axe instantané. La direction de cette troisième force est perpendiculaire au plan mené par cet axe et la vitesse relative, et dans le sens contraire au mouvement de rotation : en d'autres termes, elle est l'axe de la rotation qui amènerait la direction de la vitesse relative vers celle de l'axe instantané par le plus court chemin.

Cette décomposition de la force relative est due à M. Coriolis, qui a nommé *force d'entraînement* la seconde composante changée de sens; et *force centrifuge composée* la troisième composante. Le mouvement relatif avait été considéré d'abord par Newton dans le cas des planètes, en supposant aux axes mobiles un simple mouvement de translation. Clairaut avait examiné plus tard le mouvement dans un plan, en supposant aux axes mobiles un mouvement quelconque dans ce plan; mais il avait fait une omission qui a été corrigée récemment par M. Bertrand. M. Coriolis est le premier qui ait donné l'expression générale des forces fictives dont l'introduction ramène le mouvement relatif à un mouvement absolu.

331. Mais il faut bien remarquer que ces forces fictives n'étant pas données, et dépendant du mouvement relatif même, par les quantités v_0 et δ, rendent le problème extrêmement compliqué. Cette décomposition de la force relative, qui peut être fort utile dans diverses questions, n'est autre chose qu'une interprétation des équations différentielles que l'on établirait immédiatement pour procéder à la recherche des équations du mouvement relatif : c'est même ainsi que M. Coriolis est parvenu à l'expression des composantes de la force relative. Et dans le cas où, par la nature des données, le mouvement absolu du point pourrait être complétement déterminé, il ne faudrait pas employer la force relative, mais déterminer le mouvement absolu;

on serait alors ramené à une combinaison de mouvements connus, ce qui rentrerait dans les questions traitées dans le second livre. Dans les cas les plus compliqués, le système des équations à traiter se compose des trois équations du mouvement absolu du point, et d'une ou deux équations de condition où peuvent entrer les coordonnées absolues $x\,y\,z$, les coordonnées relatives $x'\,y'\,z'$, et d'autres quantités dépendantes du mouvement de système : on a en outre les équations qui lient les coordonnées dans les deux systèmes, et dont les coefficients sont des fonctions données du temps.

Si le point est libre, ou si les équations de liaison ne dépendent que de x, y, z, le mouvement absolu peut être déterminé séparément; mais il n'en est plus ainsi lorsque ces équations dépendent du mouvement du système, comme cela arrive presque toujours.

332. *Cas particulier où le système n'a qu'un mouvement de translation.* — Lorsque le système des axes mobiles est animé d'un simple mouvement de translation, en vertu duquel tous les points ont des vitesses égales et parallèles, variables suivant une loi quelconque, et décrivent des courbes identiques quelconques; la vitesse angulaire ω devient nulle et la troisième composante de la force relative disparaît. La proposition générale se réduit alors à la suivante :

Lorsque les axes mobiles restent constamment parallèles à eux-mêmes, la force accélératrice relative est la résultante de la force accélératrice donnée et d'une force égale et de sens contraire à celle qui déterminerait le mouvement d'un quelconque des points du système.

Ce cas particulier est celui auquel on se borne ordinairement dans les Traités élémentaires de mécanique; il suffit au calcul du mouvement relatif des planètes. Cette dernière proposition peut être immédiatement établie sans recourir à la proposition générale dont nous l'avons déduite; il suffirait de suivre, en partant des données de ce cas

simple, la même marche que pour le cas général, et l'on arriverait de suite au résultat : nous ne nous arrêterons pas à ce détail.

Si le mouvement de translation du système était rectiligne et uniforme, la seconde composante disparaîtrait aussi ; et la force relative ne serait autre chose que la force donnée elle-même.

333. *Cas où le système a un mouvement de rotation uniforme. Application à la terre.* — Dans le cas que nous considérons, la force d'inertie d'un point du système rigide, ou la seconde composante de la force relative, est précisément la force centrifuge en ce point ; la troisième composante est toujours $2m\omega v_0 \sin\delta$. Voyons ce que deviennent ces expressions dans le cas où le système rigide est la terre.

Le mouvement autour du soleil étant produit par une force appliquée à toutes les molécules, et qui peut être regardée comme sensiblement la même pour des masses égales, quelle que soit leur position dans la terre, ne change pas d'une manière appréciable les mouvements relatifs, et nous en ferons abstraction. Nous considérerons donc la terre comme ayant un mouvement uniforme de rotation autour de son axe immobile ; la rotation entière s'effectue dans un jour sidéral, c'est-à-dire dans un temps exprimé par le nombre 86164 ; d'où résulte

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0,000073,$$

ce qui est une très-petite quantité. L'angle δ est celui que fait la vitesse relative avec l'axe de la terre, ou le complément de celui qu'elle fait avec l'équateur ; de sorte que $v_r \sin\delta$ est la projection de la vitesse relative sur l'équateur.

En supposant la vitesse relative peu considérable, la troisième composante est très-petite par rapport aux deux

autres; et, si on la néglige dans une première approximation, on arrive à la proposition suivante :

Le mouvement apparent d'un point à la surface de la terre peut être calculé en supposant la terre immobile, et joignant la force centrifuge à celles qui agissent effectivement sur ce point.

Si l'attraction de la terre est la seule force agissant sur le point, on retombe sur le résultat déjà obtenu dans le calcul de la force qui sollicite les corps à l'état de repos, en tenant compte du mouvement de rotation de la terre.

La composante que nous avons négligée produit des perturbations dont nous ne parlerons pas ici. C'est elle qui produit le phénomène, observé depuis longtemps, de la déviation des corps vers l'est, quand on les abandonne sans vitesse à l'action de la pesanteur. C'est encore elle qui produit le mouvement du plan d'oscillation du pendule, mouvement que Poisson avait pensé devoir être insensible, à cause de la petitesse de cette force, mais que les belles expériences de M. Foucault nous ont fait connaître.

334. *Remarque générale.* — Le mouvement relatif coïncidant avec un mouvement absolu dans lequel l'état initial serait le même que l'état relatif initial, et dans lequel la force serait la résultante de la force donnée et des deux forces fictives, c'est-à-dire la force relative; il s'ensuit que toutes les propositions démontrées dans le mouvement absolu d'un point libre subsisteront dans le mouvement relatif en y considérant le point comme soumis à l'action de la force relative. Nous allons en donner quelques exemples.

335. *Principe des aires dans le mouvement relatif.* — La remarque que nous venons de faire nous donne immédiatement les conséquences suivantes :

Lorsque la force relative d'un mobile passe constamment par un même point du système en mouvement, la

trajectoire relative du mobile est plane, et le rayon vecteur, mené du point constant au mobile, décrit des aires relatives proportionnelles aux temps correspondants.

Et réciproquement :

Si le rayon vecteur mené d'un point constant du système au mobile, décrit des aires dont les projections sur trois plans rectangulaires liés au système croissent proportionnellement aux temps; ou, en d'autres termes, si la trajectoire relative d'un mobile est plane et que les aires décrites par son rayon vecteur, partant d'un point constant de ce plan, croissent proportionnellement au temps, la force relative qui agit sur le mobile passe à chaque instant par ce point constant.

336. *Équation des forces vives dans le mouvement relatif d'un point libre.* — En considérant le mouvement absolu qui est identique au mouvement relatif du mobile, la moitié de l'accroissement de la force vive dans ce mouvement, pendant un temps infiniment petit, sera égal au travail des forces pendant ce même temps. Donc, en introduisant les dénominations du mouvement relatif, le travail élémentaire de la force relative est égal à la moitié de la force vive relative, correspondante au même temps. Or le travail d'une force est égal à la somme de ceux de ses composantes, et le travail relatif de la troisième composante de la force relative est nul, puisque cette force est perpendiculaire à la vitesse relative, et, par conséquent, à la trajectoire relative. On peut donc énoncer cette proposition :

Dans le mouvement relatif d'un point libre, la moitié de l'accroissement de la force vive, dans un intervalle infiniment petit, est égale au travail correspondant de la force réelle, plus au travail de la force d'inertie que produirait le point s'il était lié au système à l'instant que l'on considère.

337. *Du mouvement relatif d'un point qui n'est pas*

libre. — Considérons maintenant le cas où le mobile dont on cherche le mouvement relatif, ne serait pas entièrement libre. Il peut être lié par une ou par deux équations, et ces équations peuvent renfermer d'une manière quelconque le temps ainsi que les coordonnées absolues et relatives du point. Comme les équations de transformation des coordonnées permettent d'exprimer les unes au moyen des autres, on peut supposer que ces équations ne renferment que le temps et les coordonnées relatives, par exemple. Le point se trouve ainsi assujetti, par chaque équation, à rester sur une surface variable avec le temps, et donnée à chaque instant de forme et de position par rapport au système des axes mobiles.

Cette surface produit à chaque instant une force normale, et, si on la joignait aux forces qui agissent sur le point, on pourrait supprimer la surface; et, s'il n'existait que cette seule liaison, le point pourrait alors être considéré comme entièrement libre, et l'on rentrerait dans le premier cas. D'où résulte cette proposition :

Lorsque le mobile est assujetti à rester sur une surface donnée, variable de forme et de position, la force relative se déterminera comme dans le cas d'un point libre, pourvu que l'on joigne à la force donnée une force indéterminée, normale à la surface, au point où se trouve le mobile et à l'instant que l'on considère.

Si, au lieu d'une seule surface, on en avait deux, on agirait de même pour la seconde, et l'on aurait une seconde force indéterminée, normale à la seconde surface. Ces deux forces se composeraient en une seule indéterminée en grandeur, et assujettie à se trouver dans le plan normal à la courbe d'intersection des deux surfaces.

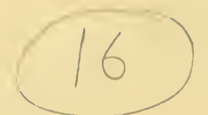
On voit que, dans le cas où le point est lié par une seule équation, il s'introduit par cela même une nouvelle quantité inconnue, mais il s'ajoute en même temps une équa-

tion connue entre les coordonnées et le temps. Si le point est lié par deux équations, il s'introduit en même temps deux inconnues ; de sorte que le nombre des inconnues est toujours égal au nombre des équations.

D'après la remarque générale que nous avons faite sur l'extension au mouvement relatif, des propositions démontrées dans le mouvement absolu, il est presque inutile de dire que l'équation des forces vives relatives aura lieu lorsque le point sera assujetti à rester sur une surface ou une courbe de forme constante, et liée invariablement au système des axes mobiles. Et, en effet, la force qu'elle produit étant normale à la trajectoire relative du mobile, donne un travail élémentaire égal à zéro.

Nous avons terminé l'exposition des principes généraux qui se rapportent au mouvement d'un point. Nous en ferons quelques applications importantes dans le livre suivant.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.


16